

Анализ результатов применения метода пчелиной колонии в задаче раскраски графов общего вида

А. О. Пшеничных¹, Э. И. Ватутин¹ ✉

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: evatutin@rambler.ru

Резюме

Цель исследования. Обнаружен большой спектр задач, которые важны на практике и которые могут быть сведены за полиномиальное время к задачам дискретной комбинаторной оптимизации, многие из которых допускают решение с применением теории графов. Одна из таких задач – отыскание хроматического числа графа и соответствующей ему раскраски. Учитывая факт того, что комбинаторная задача отыскания хроматического числа графа относится к классу сложности NP и не допускает получения оптимального решения за рациональное время для задач практически важной размерности, то поиск подходящего эвристического метода, позволяющего получать решения высокого качества с низкими затратами, необходимыми для вычисления, является востребованным и актуальным. Целью проведённого исследования является анализ результатов использования метода пчелиной колонии в поставленной задаче. Задачами описываемой работы являются: описание алгоритмических приёмов в формализованной форме, которые дают возможность применить метод пчелиной колонии в решаемой задаче, внесение модификаций в метод пчелиной колонии, повышающих эффективность применения метода, а именно качество получаемых итоговых раскрасок, а также определение факторов, влияющих на качество и временные затраты при нахождении решений.

Методы. Для проведения исследования в выбранной области были организованы вычислительные эксперименты, базирующиеся на применении эвристических методов в рассматриваемой задаче. Была проведена метаоптимизация настроечных параметров методов и определение их скорости сходимости, а также выполнено сравнение качества и времени получения решений.

Результаты. В результате проведённого исследования была выявлена скорость сходимости метода большая, чем у метода случайных блужданий, обнаружена зависимость качества получаемых итоговых раскрасок от размера графа N и плотности d . Было установлено, что выбранный метод является более быстрым относительно метода взвешенного случайного перебора с вариацией вершин по минимуму допустимых цветов на $\approx 67\%$, который на текущий момент формирует решения с самым низким хроматическим числом, при этом проигрывая ему в качестве на $\approx 7\%$. Замечена более высокая скорость сходимости при сравнении с методом случайных блужданий, принцип работы которого совпадает с пчёлами-фуражирами.

Заключение. Обнаружено, что метод пчелиной колонии находит раскраски с аналогичным усреднённым хроматическим числом за меньшее число итераций, чем метод случайных блужданий, т.е. обладает более высокой скоростью сходимости, при этом оставаясь значительно быстрее относительно метода случайного перебора с вариацией вершин по уменьшению допустимых цветов.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; хроматическое число графа; эвристические биоинспирированные методы; теория графов; метод пчелиной колонии; метод случайного перебора; метод случайных блужданий.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Пшеничных А. О., Ватулин Э. И. Анализ результатов применения метода пчелиной колонии в задаче раскраски графов общего вида // Известия Юго-Западного государственного университета. 2020; 24(4): 126-145. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-4-126-145>.

Поступила в редакцию 11.08.2020

Подписана в печать 26.10.2020

Опубликована 30.12.2020

Analysis of the Results of Applying the Bee Colony Method in the Problem of Coloring General Graphs

Aleksandr O. Pshenichnykh ¹, Eduard I. Vatutin ¹ ✉

¹ Southwest State University

50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: evatutin@rambler.ru

Abstract

Purpose of research. We have discovered a wide range of problems that are important in practice and which can be reduced in polynomial time to discrete combinatorial optimization problems, many of which can be solved using graph theory. One of these tasks is finding the chromatic number of a graph and its corresponding coloring. Taking into account the fact that the combinatorial problem of finding the chromatic number of a graph belongs to the complexity class and does not allow obtaining an optimal solution in a rational time for problems of practically important dimension, the search for a suitable heuristic method that allows obtaining high-quality solutions with low costs required for computation is demanded and relevant. The aim of the study is to analyze the results of using the bee colony method in the task at hand. The tasks of this research are: description of algorithmic techniques in a formalized form, which make it possible to apply the bee colony method in the problem to be solved, making modifications to the bee colony method that increase the efficiency of the method, namely the quality of the resulting final colorings, as well as the determination of factors affecting the quality and the time spent in finding solutions.

Methods. To conduct research in the selected area, computational experiments were organized based on the use of heuristic methods in the problem under consideration. Meta-optimization of the tuning parameters of the methods and determination of their convergence rate was carried out, as well as a comparison of the quality and time of obtaining solutions.

Results. As a result of the study, the convergence rate of the method was found to be higher than that of the random walk method; the dependence of the quality of the resulting final colorings on the graph size N and density d was found. It was found that the chosen method is faster than the method of weighted random enumeration with the variation of vertices according to the minimum of admissible colors on $\approx 67\%$, which currently generates solutions with the lowest chromatic number, while losing quality to it on $\approx 7\%$. A higher rate of convergence was noticed when compared with the method of random walks, the principle of which is the same as that of foraging bees.

Conclusion. It was found that the bee colony method finds colorings with the same average chromatic number in fewer iterations than the random walk method, i.e. it has a higher convergence rate, while remaining significantly fast relative to the method of random search with a variation of vertices to reduce the allowed colors.

Keywords: combinatorial optimization; chromatic number of a graph; heuristic bioinspired methods; graph theory; bee colony method; random search method; random walks method.

Conflict of interest. The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Pshenichnykh A. O., Vatutin E. I. Analysis of the Results of Applying the Bee Colony Method in the Problem of Coloring General Graphs. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2020; 24(4): 126-145 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-4-126-145>.

Received 11.08.2020

Accepted 26.10.2020

Published 30.12.2020

Введение

Имеется немалый объём задач практической важности, для которых допустима полиномиальная сводимость к задачам теории графов. Представителем такой задачи является отыскание хроматического числа графа $G = \langle A, V \rangle$. Выбранная задача может применяться при разбиении графов [1, с. 65], составлении расписаний, компиляции программ [2, с. 47], решении задач на базе латинских квадратов [3, с. 252], в области компьютерных сетей [4, с. 162], компоновки блоков ЭВА [5, с. 6], сотовых сетях [6, с. 22], сетях беспроводного абонентского доступа [7, с. 3], назначении переменных для регистров [8, с. 41] и пр. Многие задачи дискретной комбинаторной оптимизации возможно свести к решению данной [9, с. 391]. Поиск раскраски графа общего вида относится к классу сложности NP [10, с. 232], что не даёт возможности получения точного решения за рациональное время для задач практически важной размерности [11, с. 60]. Поэтому определение необходимого эвристического метода, с помощью которого будет допу-

стимо отыскание решений хорошего качества при малых временных затратах, является важной и актуальной задачей.

При решении задачи раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$ необходимо выявить минимально возможное количество цветов, достаточных для получения корректной раскраски, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ – множество вершин; $N = |A|$ – число вершин; $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер; $M = |V|$ – число рёбер. Возможны случаи, когда граф не будет полносвязным. Такая ситуация соответствует отсутствию связей между некоторыми парами вершин, при этом к графу можно применить числовую характеристику, выраженную значением «плотности»

$$d(G) = \frac{M}{N(N-1)} \quad (\text{данная характеристика при решении задач дискретной комбинаторной оптимизации важна в связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве, одной из координат которого в задачах}$$

на графах является плотность $d(G)$. Требуется отыскать такой набор цветов раскраски $X = \{x(a_1), x(a_2), \dots, x(a_N)\}$ для каждой вершины графа a_i , $x(a_i) \in C$, из конечного множества цветов $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{\chi^*}\}$, чтобы $\chi^* = |C| \rightarrow \min$, причём смежные вершины графа не могут быть окрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}): x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$. При успешном отыскании оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G , а в случае нахождения суб- или квазиоптимальной раскраски – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$. При программной реализации вышеуказанного метода требуется определить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть окрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильности раскраски, в этом случае такие цвета будем называть «допустимыми» (в случае несоблюдения условий поставленной задачи – «недопустимыми»). Для того, чтобы проверить эффективность метода избирается некая выборка из K графов $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$, после чего будет оценено усреднённое качество решения $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^K Q(G_i)}{K}$, где $Q(G_i)$ – качество i -го решения и равное $\chi(G_i)$, обычно оно больше оптимума $\bar{Q} > Q^*$.

При решении задачи отыскания хроматического числа графа авторами работы были испробованы методы жадного перебора, случайного перебора, взвешенного случайного перебора, метод муравьиной колонии, а также отдельная группа методов, основанных на модификациях изначально найденного решения: метод случайных блужданий и имитации отжига. Вследствие чего для сравнительного анализа с другими методами был отобран метод пчелиной колонии, который также осуществляет модификации над имеющимися в памяти улья решениями.

Материалы и методы

Метод пчелиной колонии предложил Д. Карабога (D. Karaboga) [12, с. 1] в 2005 г. (по другим данным, Д. Фам (D. Pham) с соавторами [13, с. 1]), однако его основная идея во многом напоминает мультистарт-алгоритмы [14, с. 229], известные с середины XX века. Данный метод, как и метод муравьиной колонии, относится к классу биоинспирированных методов [15, с. 81].

В основу данного метода положен опыт наблюдения за поведением колонии медоносных пчёл, занимающихся в природе разведкой пространства, окружающего улей, на предмет поиска нектара с целью сбора его в дальнейшем. В природе пчелы в улье имеют чёткое разделение ролей: рабочие пчелы (фуражиры) занимаются сбором нектара, пчелы-разведчики (скауты) –

поиском наиболее перспективных областей с нектаром, трутни и матка задействованы в процессе размножения, часть пчёл занимается охраной улья и поддержанием его определённой температуры. При решении оптимизационных задач обычно используют только два типа пчёл: разведчиков и фуражиров, остальные в контексте рассматриваемых задач пока не находят применения.

Между указанными типами пчёл в улье поддерживается определённое соотношение (например, шесть рабочих пчёл на одного разведчика), оптимальное значение которого, по-видимому, было найдено в ходе эволюции, что обеспечивает организацию эффективной работы улья в целом.

Приведённые выше социальные роли агентов могут быть использованы при решении задач дискретной оптимизации [16, с. 183]. Роль разведчика будет заключаться в проведении разведки пространства допустимых решений $\mathfrak{R}$, с выбором одной из его точек $X_i \in \mathfrak{R}$, в которой целевая функция имеет некоторое значение $f(X_i)$. Данный выбор в простейшем случае может быть реализован с использованием метода случайного перебора. Учитывая факт невозможности хранения информации о всех путях в электронном аналоге улья, сохраняется информация только о H лучших местах $S = \{X_1, X_2, \dots, X_w\} \subseteq \mathfrak{R}$, которые характеризуются наиболее вы-

годными значениями целевой функции $f(X_1) \leq f(X_2) \leq \dots \leq f(X_w)$ (что в достаточной степени аналогично с ограничением на объём популяции при использовании генетического подхода, однако в данном случае величина H скорее характеризует информационную ёмкость «памяти» улья, нежели непосредственное количество пчёл в улье). Рабочая пчела в качестве направления движения выбирает одно из значений $X_i \in S$, $i = \overline{1, H}$, при этом в ходе своей работы она осуществляет разведку «вокруг» начальной точки X_i . Для этого необходимо каким-либо образом модифицировать начальное решение X_i , для чего можно использовать модифицирующие операции (в данном случае: выбрать случайную i -ю вершину, покрасить её в недопустимый j -й цвет, для всех соседних вершин присвоить допустимые цвета с целью получения корректной раскраски), применение каждой из которых приводит к однократному элементарному изменению решения $X_i \rightarrow X'_i$, а минимальное число подобных операций $d(X_i, X_j)$, необходимое для превращения X_i в X_j , можно рассматривать в качестве некоторой метрики, специфичной для выбранной задачи и являющейся аналогом широко известных расстояний Хэмминга [17, с. 147] или Левенштейна [18, с. 845]. Число R модифицирующих операций, последовательно применяемых к решению X_i с це-

лью получения решения X_j , не превышает значения метрики $d(X_i, X_j)$ и может характеризоваться как радиус для окрестности разведки. Результатом проделанной работы пчелы-фуражира является получение решения X_j и соответствующая ему оценка значения целевой функции $f(X_j)$.

Если хотя бы одно решение $X_k \in S$, $k = \overline{1, H}$ среди найденных ранее H решений уступает по качеству вновь найденному, предыдущее решение заменяется на новое при их неизменном общем количестве в электронной модели улья: $S^{(t)} = S^{(t-1)} \setminus \{X_k\} \cup \{X_j\}$, где t – номер итерации. Комбинируя работу разведчиков и рабочих пчёл в течение $C_{\max}$ итераций, следует ожидать монотонного увеличения качества решений в составе отобранного подмножества S . Выбор наилучшего среди них можно считать результатом работы метода.

Эффективность применения приведённого метода на практике зависит от ряда настроечных параметров, значения которых должны быть определены в ходе метаоптимизации. В рассматриваемой задаче значения настроечных параметров существенно отличаются в зависимости от обрабатываемых графов. Данная особенность метода пчелиной колонии является в достаточной степени неудобной и не позволяет выработать единые рекомендации по компромиссным значениям настроечных пара-

метров, которые были бы неплохими для всех условий применения методов, в отличие от ряда других итерационных эвристических методов. Данная закономерность прослеживается и в другой задаче дискретной комбинаторной оптимизации, рассмотренной в работе [19, с. 52].

Метод пчелиной колонии, как и методы имитации отжига и случайных блужданий, является двухстадийным, т.к. он использует случайный перебор в виде стратегии для разведчиков (первая стадия) и производит случайную разведку вблизи перспективных направлений (вторая стадия). Однако для задания начального решения можно применять и другие методы в рамках т.н. гибридизации методов [16, с. 280].

Рассматриваемый метод является усложнённым вариантом метода случайных блужданий, т.к. для обоих методов требуется найти некоторое начальное решение (для метода пчелиной колонии в текущей реализации – множество решений в ходе полётов пчёл-разведчиков), принцип работы модифицированного метода случайных блужданий, применяемый для решения намеченной задачи, приведён ниже.

1. Задать начальное решение $C_0(G)$: все вершины имеют разный цвет, либо применяется решение, полученное с помощью другого метода. Задать относительное количество модификаций R на одном шаге, вероятность α назначения первого или случайного недопустимого цвета выбранной вершине, ве-

роятность β назначения первого или случайного допустимого цвета всем смежным с выбранной вершинам в ходе выполнения модифицирующей операции.

2. Произвести $L = \lfloor R \cdot N + 1 \rfloor$ модификаций $o(\cdot)$ (в данном случае: выбрать случайную i -ю вершину, покрасить её в недопустимый j -й цвет, для всех соседних вершин присвоить допустимые цвета с целью получения корректной раскраски) с получением L решений: $C_i(G) = o(C_{i-1}(G))$. Оценить качество всех полученных решений, запомнить наилучшее.

3. Повторять п. 2 для начального решения $C_0(G)$ из п. 1 до тех пор, пока не будет сформировано $C_{\max}$ решений, и выбрать лучшее из них.

От классического метода случайных блужданий предложенный вариант реализации отличается тем, что производит $\left\lfloor \frac{C_{\max}}{L} \right\rfloor$ построений цепочек решений, отталкиваясь от начальной раскраски $C_0(G)$ в соответствии с одним из вариантов реализации мултистарта стратегии поиска решения. В случае необходимости получения «классического» поведения метода необходимо установить $R = 0$.

Принцип работы метода пчелиной колонии схематично представлен ниже.

1. Задать размер памяти улья H , соотношение числа рабочих пчёл к чис-

лу разведчиков N_w , относительное количество модификаций R на одном шаге, вероятность α назначения случайного или первого недопустимого цвета выбранной вершине, вероятность β назначения случайного или первого допустимого цвета всем смежным с выбранной вершинам.

2. Произвести $C_{\max} / (N_w + 1)$ вылетов разведчиков (нахождений решений, в данном случае с помощью метода случайного перебора с перебором вершин по минимуму допустимых цветов за 1 итерацию, наилучший порядок рассмотрения вершин взят в соответствии с результатами из работы [20, с. 101]).

3. Отобрать H лучших из них.

4. Для каждого из N_w рабочих выбрать из памяти улья лучшее решение для вылета; произвести $L = \lfloor R \cdot N + 1 \rfloor$ модификаций $o(\cdot)$ (в данном случае: выбрать случайную i -ю вершину, покрасить её в недопустимый j -й цвет, для всех соседних вершин присвоить допустимые цвета) с получением L решений: $C_i(G) = o(C_{i-1}(G))$. Лучшее решение из всех модификаций пчелы-рабочего заменяет худшее в памяти улья.

5. Повторить п.4, пока не будет проанализировано $C_{\max}$ раскрасок, и выбрать лучшее решение.

От классического метода пчелиной колонии предложенный вариант реализации отличается тем, что пчел-фуражир производит L построений це-

почек решений, отталкиваясь от начальной выбранной из памяти улья раскраски $C_k(G)$ в соответствии с одним из вариантов реализации мултистарт-стратегии поиска решения. В случае необходимости получения «классического» поведения метода необходимо установить $R = 0$.

В модифицированном методе пчелиной колонии присутствуют 5 настроечных параметров: H – размер памяти улья (означает объём выборки решений, найденных разведчиками); N_w – множитель рабочих пчёл (во сколько раз их больше, чем разведчиков); R – относительное количество вносимых изменений (означает, сколько необходимо произвести модифицирующих операций над графом в зависимости от его размера); α – вероятность того, что цвет для выбранной вершины будет выбран случайно или взят минимально недопустимый; β – вероятность того, что цвет для смежных вершин с выбранной будет выбран случайно или взят минимально допустимый.

Поскольку данный метод за 1 итерацию формирует не одно, а $L \cdot N_w$ решений, то было добавлено принудительное завершение работы при получении свыше $C_{\max}$ решений.

В ходе проверки было выявлено, что с увеличением количества итераций на несколько порядков, пропорционально увеличивалось и оптимальное

значение памяти улья. Вследствие этого решено было изменить его с конкретного числового значения на параметр W в диапазоне $[0; 1]$, который зависит от числа формируемых решений, т.е. количество вылетов пчёл-разведчиков будет равно $C_{\max} / (N_w + 1)$, после этого будет отобрано $H = \frac{C_{\max}}{N_w + 1} \cdot W$ лучших раскрасок и записано в память улья.

Результаты и их обсуждение

Из-за наличия настроечных параметров метода перед его использованием и для получения лучшего качества необходимо произвести метаоптимизацию. Соответствующие вычислительные эксперименты проводилась для $|\Lambda| = 500$ случайных графов для выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, K, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой, размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0,777$, время на графиках показано в секундах.

Влияние параметра W , который определяет число полётов разведчиков по отношению к количеству вылетов рабочих пчёл (при значении $W = 0$ – будет ровно 1 вылет разведчика, остальные – рабочих пчёл; при значении 1 – будут только вылеты разведчиков; при значении $W = 0,5$ будет равенство числа полётов пчёл-рабочих и пчёл-разведчиков; в остальных случаях при значениях параметра в диапазоне $(0;1)$ будет пропорциональная зависи-

мость количества вылетов скаутов и фуражиров от данного параметра), на качество решения показано на графиках

ниже (рис. 2 – рис. 3), остальные параметры метода равны: $C_{\max} = 1000$; $N_w = 3$; $R = 1,5$; $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,9$.

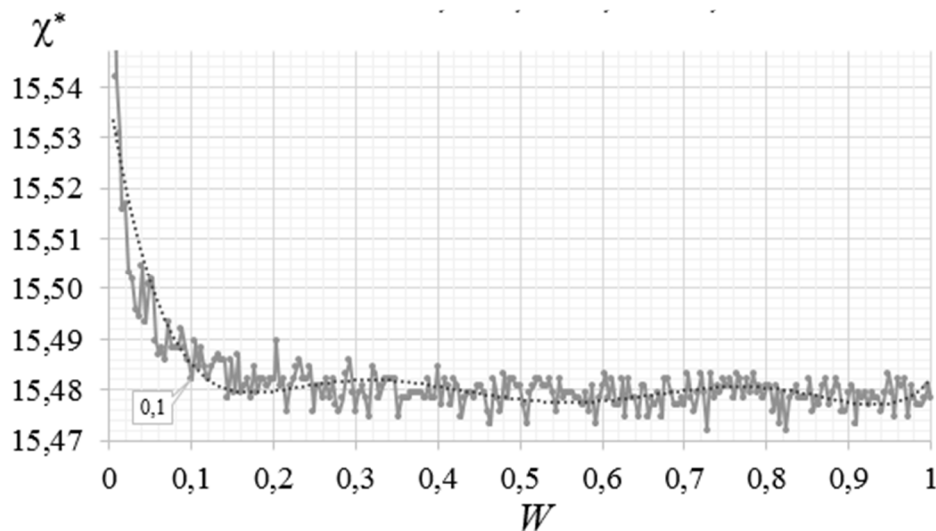


Рис. 1. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от размера памяти улья W

Fig. 1. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the memory size of the bee hive W

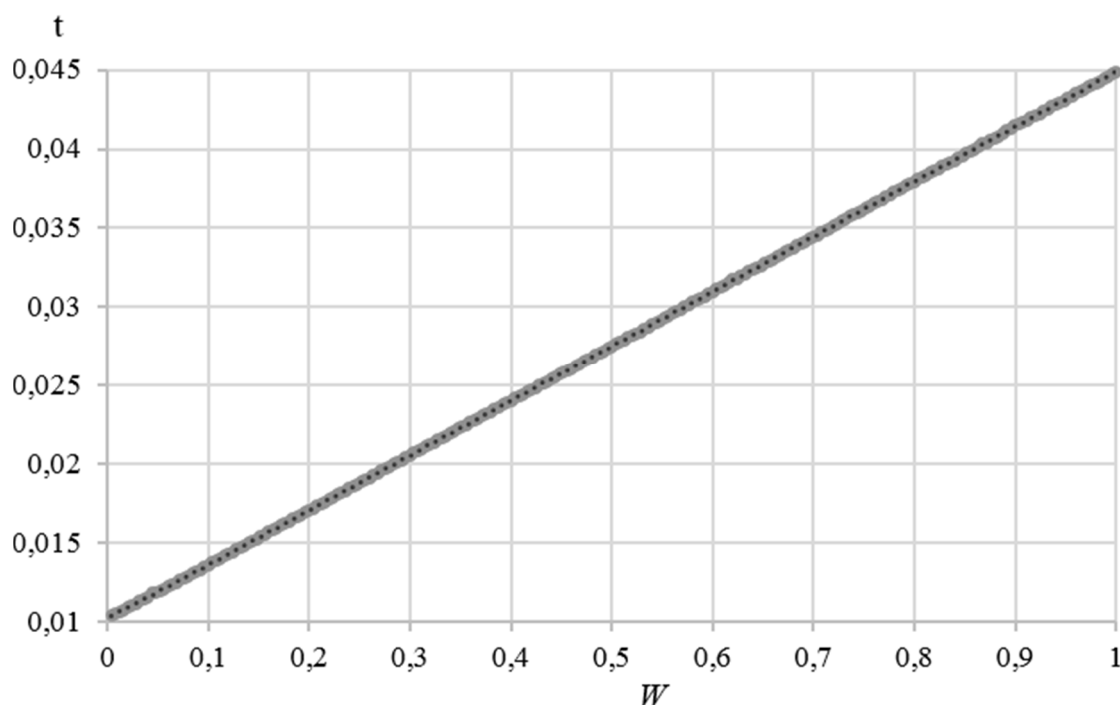


Рис. 2. Зависимость времени нахождения решения от размера памяти улья W

Fig. 2. Dependence of the time of finding the solution on the memory size of the bee hive W

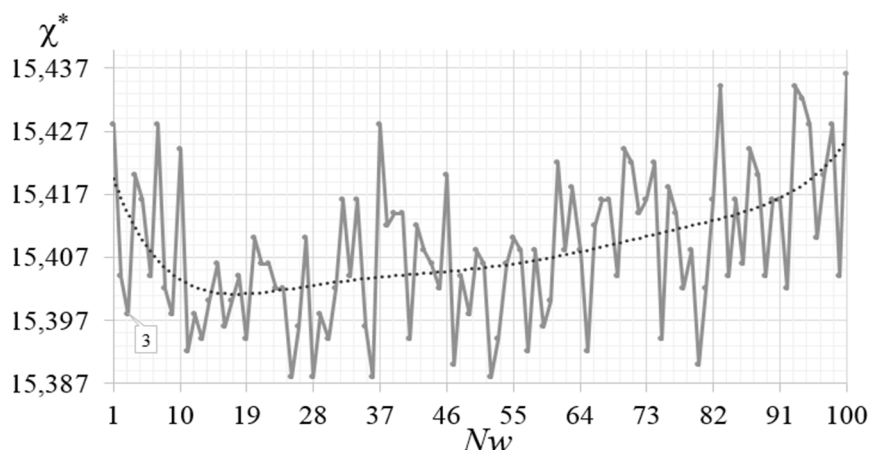


Рис. 3. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от множителя количества рабочих пчёл N_w

Fig. 3. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the multiplier of the number of worker bees N_w

С увеличением значения параметра время решения повышается, что объясняется большей вариативностью выбора вылетов рабочих, вследствие чего было принято значение $W^* = 0,1$ из-за баланса между качеством получаемых решений и времени их нахождения. При

этом время имеет линейную зависимость от размера памяти улья.

Влияние параметра N_w на качество решения показано на графиках ниже (рис. 4 – рис. 5), остальные параметры метода равны: $C_{\max} = 1000$; $W = 0,1$; $R = 1,5$; $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,9$.

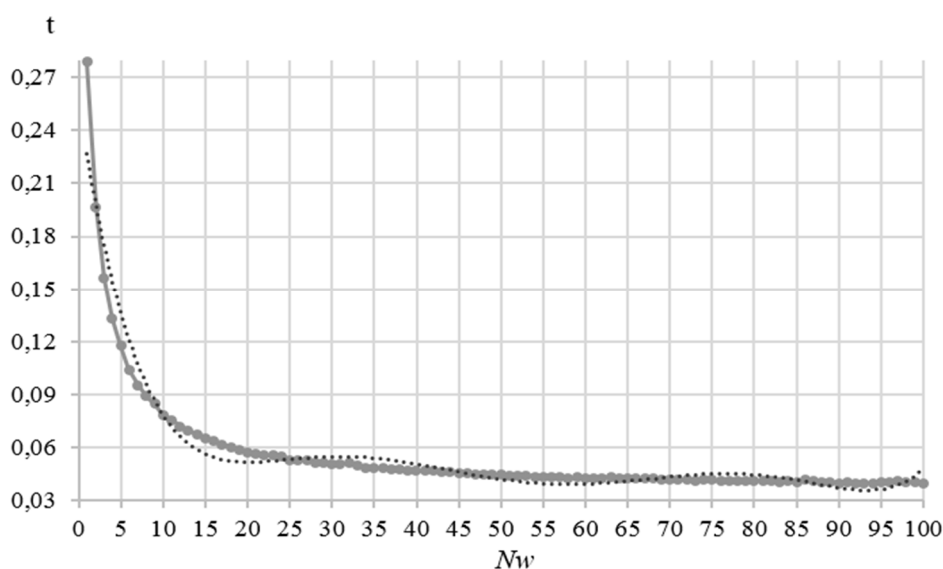


Рис. 4. Зависимость времени нахождения решения от множителя количества рабочих пчёл N_w

Fig. 4. Dependence of the time of finding the solution on the multiplier of the number of worker bees N_w

При малых значениях параметра наблюдается улучшение качества решения, что объясняется следующим образом: при большом количестве рабочих пчёл и малом числе разведчиков многим рабочим приходится «работать» в одних и тех же или близких областях пространства решений или вовсе «простаивать» (зависит от количества модификаций R), превращая метод в боль-

шей степени похожий на случайные блуждания, вследствие чего за оптимальное значение параметра было принято $N_w^* = 3$.

Влияние параметра R на качество решения показано на графиках ниже (рис. 6 – рис. 7), остальные параметры метода равны: $C_{\max} = 1000$; $W = 0,1$; $N_w = 3$; $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,9$.

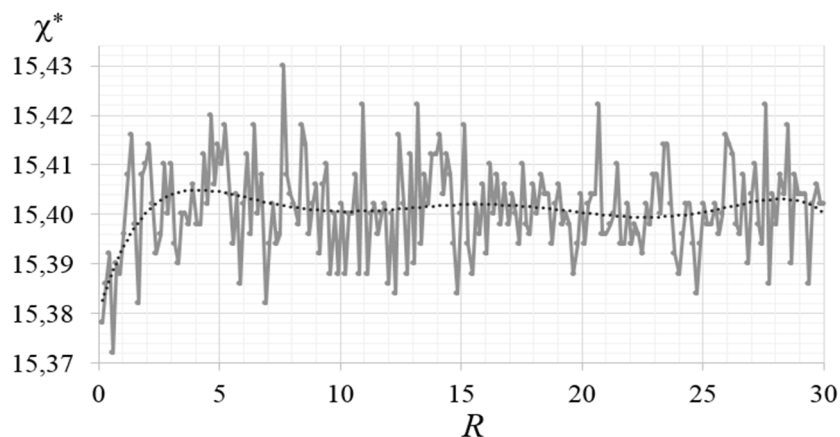


Рис. 5. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от количества модификаций решения R

Fig. 5. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the number of solution modifications R

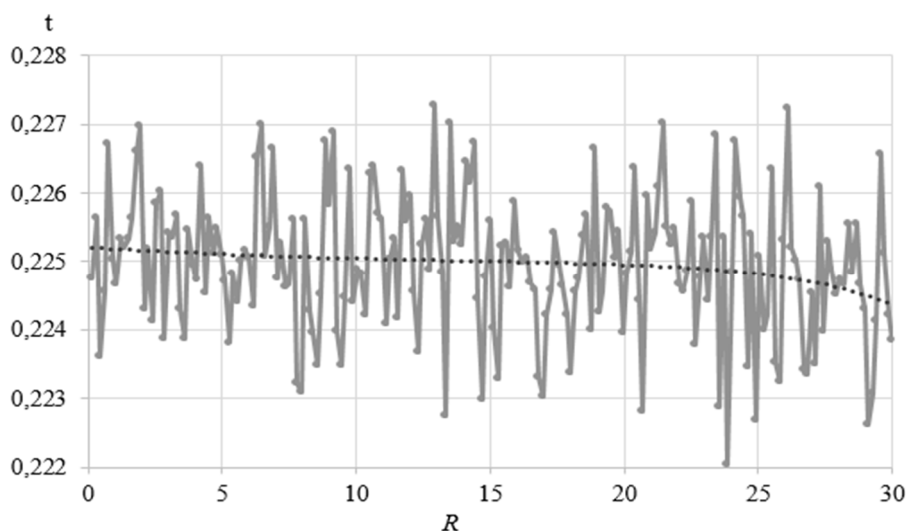


Рис. 6. Зависимость времени нахождения решения от количества модификаций решения R

Fig. 6. Dependence of the time of finding the solution on the number of solution modifications R

Статистически значимая зависимость качества решений от значения данного параметра отсутствует, за оптимальное было принято $R^* = 0,1$ из-за баланса вылетов рабочих пчёл и числа вносимых изменений 1 пчелой-фуражиром. Выбранное значение означает, что каждый рабочий будет производить $0,1 \cdot N = 0,1 \cdot 40 = 4$ модификаций решения, найденного разведчиком, т.н. радиус разведки. Ввиду того, что количество итераций (формируемых решений) ограничено значением $C_{\max} = 1000$, а количество вылетов разведчиков равно $\frac{C_{\max}}{N_w + 1} = \frac{1000}{3 + 1} = 250$, то в данной ситуации отработают все разведчики и 188 рабочих пчёл (причём будут выполнены

не все 4 модификации над 188-м решением пчёл-фуражиров, а только 2).

Влияние параметра α на качество решения показано на графиках ниже (рис. 8 – рис. 9), остальные параметры метода равны: $C_{\max} = 1000$; $W = 0,1$; $N_w = 3$; $R = 0,1$; $\beta = 0,9$.

Статистически значимое влияние данного параметра на качество формируемых решений практически не прослеживается и находится в пределах погрешности, за оптимальное было принято $\alpha^* = 1,0$, при котором время отыскания решений будет минимальным.

Влияние параметра β на качество решения показано на графиках ниже (рис. 10 – рис. 11), остальные параметры метода равны: $C_{\max} = 1000$; $W = 0,1$; $N_w = 3$; $R = 0,1$; $\beta = 1,0$.

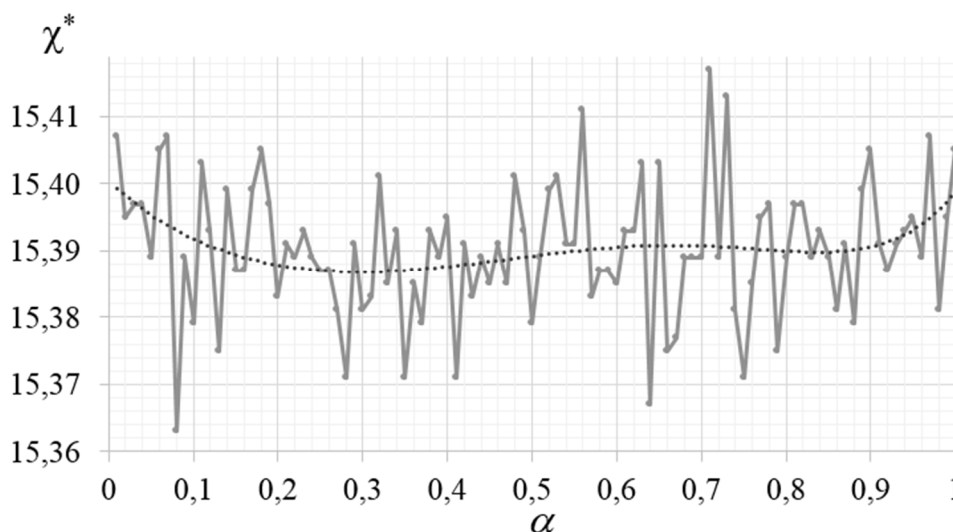


Рис. 7. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от вероятности выбора случайного или минимально недопустимого цвета для выбранной вершины α

Fig. 7. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the probability of choosing a random or minimally invalid color for the selected vertex α

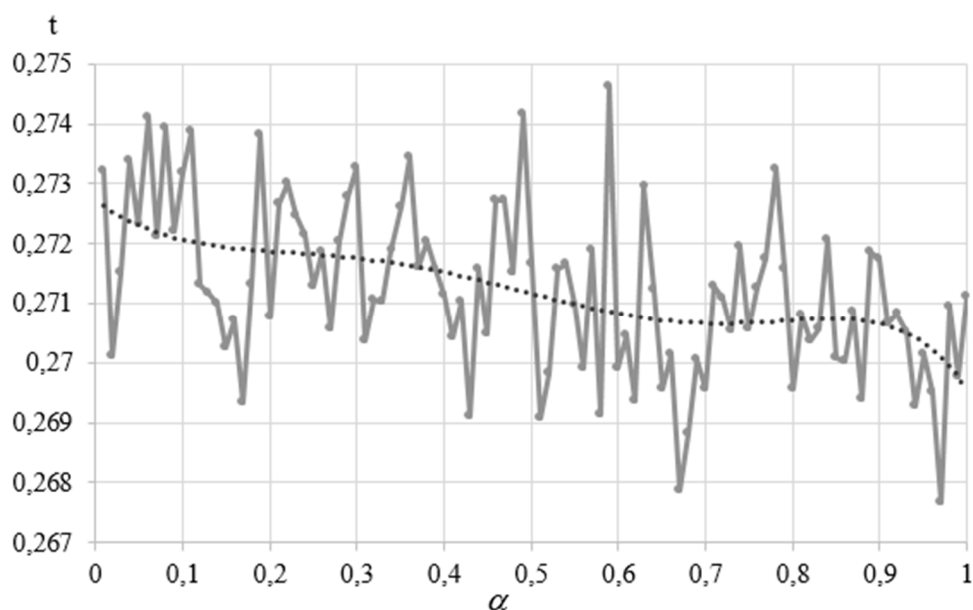


Рис. 8. Зависимость времени нахождения решения от вероятности выбора случайного или минимально недопустимого цвета для выбранной вершины α

Fig. 8. Dependence of the time of finding the solution on the probability of choosing a random or minimally invalid color for the selected vertex α

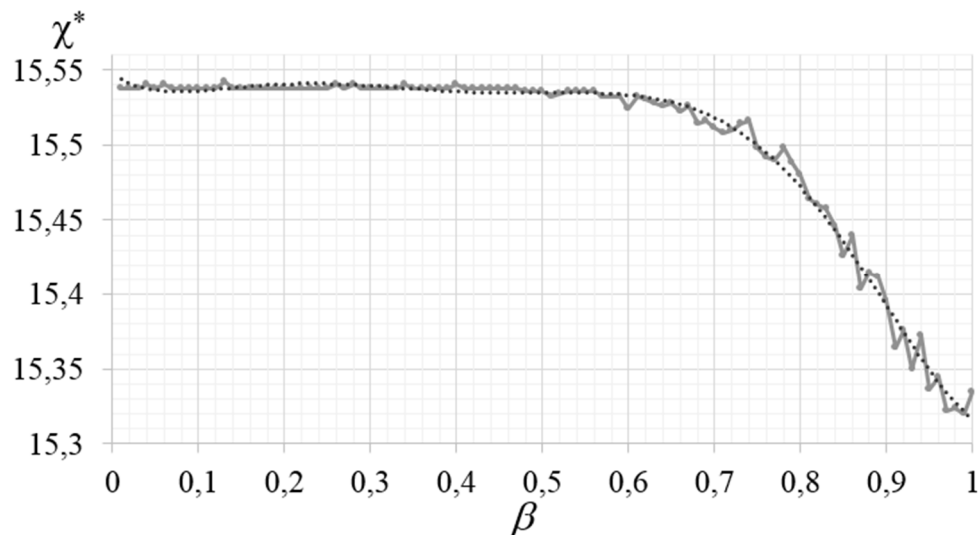


Рис. 9. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от вероятности выбора случайного или минимально допустимого цвета для всех смежных с выбранной вершин β

Fig. 9. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the probability of choosing a random or minimum acceptable color for all vertices adjacent to the selected vertex β

При приближении значения параметра к 1 происходит уменьшение затрачиваемого вычислительного време-

ни и усреднённого хроматического числа, поэтому за оптимальное было принято $\beta^* = 1,0$.

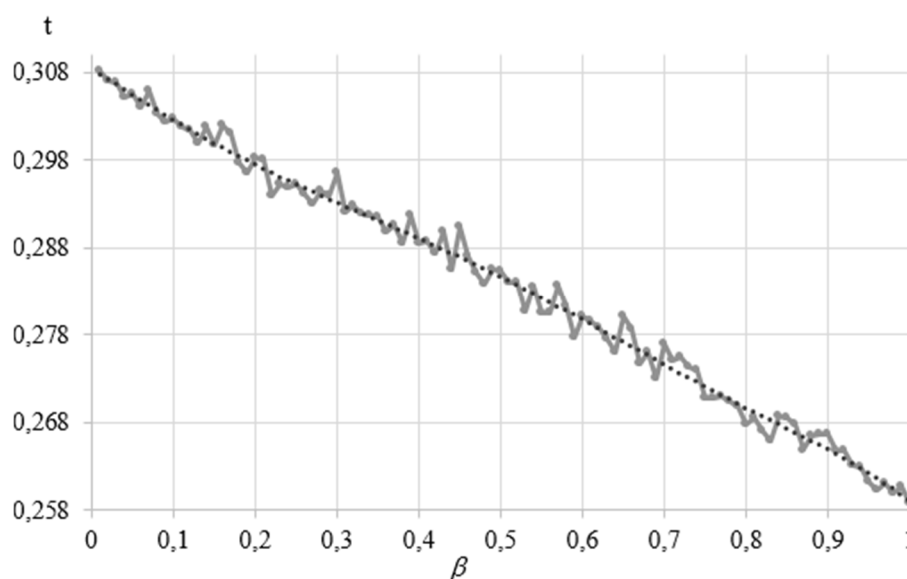


Рис. 10. Зависимость времени нахождения решения от вероятности выбора случайного или минимально допустимого цвета для всех смежных с выбранной вершин β

Fig. 10. Dependence of the time of finding the solution on the probability of choosing a random or minimum acceptable color for all vertices adjacent to the selected vertex β

Чтобы проверить скорость сходимости метода был проведён вычислительный эксперимент, его результаты показаны на рис. 12, среднее время решения при этом составило $\bar{t} = 0,29$ се-

кунд, настроечные параметры метода, используемые в экспериментах, по результатам метаоптимизации равны: $W = 0,1$; $N_w = 3$; $R = 0,1$; $\alpha = 1,0$; $\beta = 1,0$.

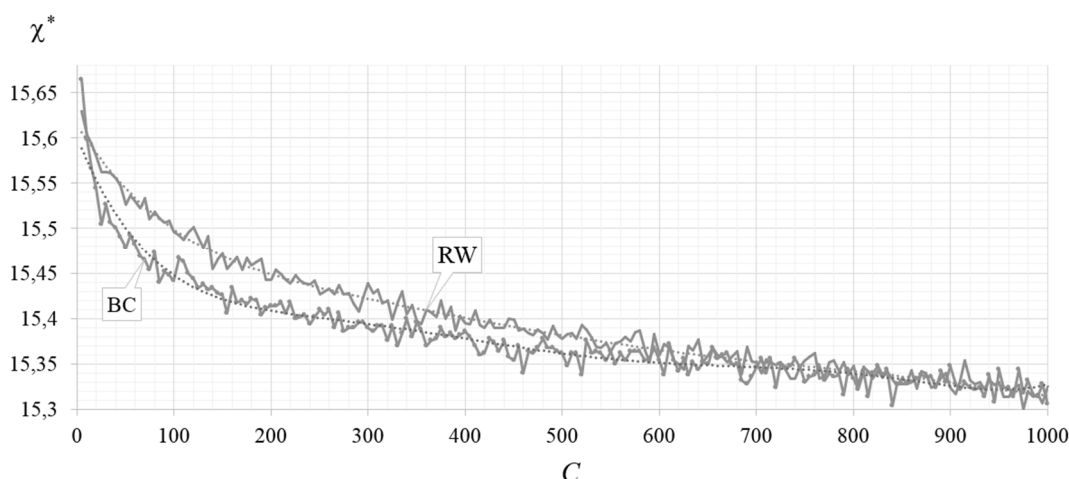


Рис. 11. Зависимость усреднённого хроматического числа χ^* от количества итераций (формируемых решений)

Fig. 11. Dependence of the averaged chromatic number χ^* on the number of iterations (generated solutions)

Скорость сходимости метода пчелиной колонии по сравнению с методом случайного перебора увеличилась, что позволяет затрачивать меньшее количество итераций для получения приемлемого качества решения.

Для более наглядного представления о сравнении исследованных эвристических методов при решении задачи определения хроматического числа графа полученные в ходе вычислительных экспериментов данные о качестве и

времени формирования решения представлены в табл. 1.

Из результатов, приведённых в табл. 1, можно сделать вывод, что метод пчелиной колонии по сравнению с методом случайных блужданий обеспечивает получение решений сопоставимого качества, при этом обладая более высокой скоростью сходимости и требуя меньших временных затрат для получения решений аналогичного качества.

Таблица 1. Результаты работы различных опробованных эвристических методов с усреднённым хроматическим числом и временем решения

Table 1. The results of various tested heuristic methods with averaged chromatic number and solution time

Метод / Method	Усреднённое хроматическое число / Averaged chromatic number	Время поиска решения, с / Time to find a solution, s
Жадный перебор (перебор вершин по минимуму цветов)	14,26	0,42
Случайный перебор (перебор вершин по минимуму цветов)	14,26	0,81
Взвешенный случайный перебор (перебор вершин по минимуму цветов)	14,1	1,07
Муравьиной колонии (перебор вершин по минимуму цветов)	14,21	0,88
Случайных блужданий	15,33	0,03
Имитации отжига	15,46	0,028
Пчелиной колонии	15,3	0,29

Однако исследованная группа методов, основывающихся на изменении текущего решения (случайные блуждания, имитация отжига, пчелиная колония), проигрывают по качеству группе

методов с последовательным формированием решения (жадный, случайный и взвешенный случайный переборы, муравьиная колония), в то же время являясь более быстрой.

Выводы

В результате проделанных вычислительных экспериментов было выявлено, что метод пчелиной колонии в задаче раскраски графа не является настолько эффективным, как эвристические методы с последовательным формированием решения: случайный перебор, взвешенный случайный перебор и метод муравьиной колонии. Обнаружено, что введенные настроечные параметры вероятности α выбора случайного или минимально недопустимого цвета выбранной вершины, а также вероятности β выбора случайного или минимально допустимого цвета для

всех смежных с выбранной вершин не оказывают существенного влияния на качество формируемых решений, однако увеличивают вычислительные затраты для их получения, поэтому выгоднее использовать жадный подход для выбора цвета вершины при модификации начального решения, чем случайный. Следует отметить, что метод пчелиной колонии обладает более высокой скоростью сходимости, чем метод случайных блужданий, при этом они сравнимы как по времени нахождения решений, так и по качеству, вследствие чего можно затрачивать меньшее число итераций для получения аналогичного качества.

Список литературы

1. Закревский А.Д., Поттосин Ю.В. Декомпозиция параллельных алгоритмов логического управления по заданному разбиению множества предложений // А и ВТ. 1985. № 4. С. 65-72.
2. Register allocation via coloring / Gregory J. Chaitin, Mark A. Auslander, Ashok K. Chandra, John Cocke, Martin E. Hopkins, Peter W. Markstein // Computer Languages. 1981. P. 47-57. [https://doi.org/10.1016/0096-0551\(81\)90048-5](https://doi.org/10.1016/0096-0551(81)90048-5).
3. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications // Elsevier. 2015. 438 p. <https://doi.org/10.1016/C2014-0-03412-0>.
4. Филоненко И.Н., Чеботарев М.В. Алгоритм раскраски графа и его применение в области компьютерных сетей // Техника и технологии, политика и экономика: проблемы и перспективы. Коломна, 2018. С. 162-168. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35587418>.
5. Курейчик В.В., Заруба Д.В., Запорожец Д.Ю. Биоинспирированный алгоритм компоновки блоков ЭВА на основе модифицированной раскраски графа // Известия Южного федерального университета. 2015. № 4 (165). С. 6-14. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23693391>.
6. Применение алгоритма последовательной раскраски графа в сотовой сети / Д.Э. Мурзаков, М.А. Зенков, А.Д. Жуков, В.В. Тишин // Естественные и математиче-

ские науки в современном мире. 2015. № 31. С. 22-32. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23570102>.

7. Решение задачи раскраски взвешенного графа для мягкого распределения ресурса пропускной способности в сетях беспроводного абонентского доступа / В.И. Калюка, С.А. Остапенко, В.Г. Кобак, В.В. Зубакин, И.В. Морозов // Известия высших учебных заведений. Северокавказский регион. Технические науки. 2015. № 4 (185). С. 3-8. <https://doi.org/10.17213/0321-2653-2015-4-3-8>.

8. Макошенко Д.В. Назначение переменных на регистры с помощью древовидного параметрического алгоритма раскраски графа // Информационные технологии. 2010. № 6. С. 41-46. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=14998776>.

9. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition // Chapman & Hall/CRC. 2006. 1016 p. <http://en.bookfi.net/book/643841>.

10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982. 416 с. URL: <https://b-ok.cc/book/437794/d9ea2f>.

11. Duffy K., O'Connell N., Sapozhnikov A. Complexity analysis of a decentralised graph colouring algorithm // Information Processing Letters. 2008. Vol. 107. Iss. 2. P. 60-63. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2008.01.002>.

12. Karaboga D.D. An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization // Technical Report-TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department. 2005. URL: https://abc.erciyes.edu.tr/pub/tr06_2005.pdf.

13. The Bees Algorithm / D.T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koc, S. Otri, S. Rahim, M. Zaidi // Technical Note, Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University. UK. 2005. <https://doi.org/10.1016/B978-008045157-2/50081-X>.

14. Ватугин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25770934>.

15. Yang X.S. Nature-inspired Metaheuristic Algorithms. Luniver Press. 2010. P. 81-95. URL: https://www.academia.edu/457296/Nature-inspired_metaheuristic_algorithms.

16. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25070137>.

17. Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes // Bell System Technical Journal. 1950. Vol. 29. P. 147-160. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x>.

18. Левенштейн В.И. Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов // Доклады академий наук СССР. 1965. Т. 163. Вып. 4. С. 845-848. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan31411>.

19. Ватугин Э.И., Титов В.С. Особенности метаоптимизации алгоритма пчелиной колонии в задаче поиска кратчайшего пути в графе при наличии ограничений на плот-

ность графа // Известия Юго-Западного государственного университета. 2016. № 2 (19). С. 52-65. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26396211>.

20. Пшеничных О., Гвоздева С.Н., Ватулин Э.И. О влиянии порядка рассмотрения вершин при поиске раскрасок графов общего вида с использованием жадного алгоритма // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2019. Т. 3. № 1. С. 101-106. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39242603>.

References

1. Zakrevsky A.D., Pottosin Yu.V. Dekompozitsiya parallel'nykh algoritmov logicheskogo upravleniya po zadannomu razbieniye mnozhestva predlozhenii [Decomposition of parallel logic control algorithms by a given partition of the set of sentences]. *A i VT = A and VT*, 1985, no. 4, pp. 65-72 (In Russ.).

2. Chaitin Gregory J., Auslander Mark A., Chandra Ashok K., Cocke John, Hopkins Martin E., Peter W. Markstein. Register allocation via coloring. *Computer Languages*, 1981, pp. 47-57. [https://doi.org/10.1016/0096-0551\(81\)90048-5](https://doi.org/10.1016/0096-0551(81)90048-5).

3. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. *Elsevier*, 2015, 438 p. <https://doi.org/10.1016/C2014-0-03412-0>.

4. Filonenko I.N., Chebotarev M.V. [Graph coloring algorithm and its application in the field of computer networks]. *Tekhnika i tekhnologii, politika i ehkonomika: problemy i perspektivy* [Engineering and technology, politics and economics: problems and prospects]. Kolumna, 2018, pp. 162-68 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35587418>.

5. Kureychik V.V., Zaruba D.V., Zaporozhets D.Yu. Bioinspirirovannyi algoritm komponovki blokov EVA na osnove modifitsirovannoi raskraski grafa [Bioinspired layout algorithm for EVA blocks based on modified graph coloring]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta = Proceedings of the Southern Federal University*, 2015, no. 4 (165), pp. 6-14 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23693391>.

6. Murzakov D.E., Zenkov M.A., Zhukov A.D., Tishin V.V. Primenenie algoritma posledovatel'noi raskraski grafa v sotovoi seti [Application of a sequential graph coloring algorithm in a cellular network]. *Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire = Natural and Mathematical Sciences in the Modern World*, 2015, no. 31, pp. 22-32 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23570102>.

7. Kalyuka V.I., Ostapenko S.A., Kobak V.G., Zubakin V.V., Morozov I.V. Reshenie zadachi raskraski vzveshennogo grafa dlya myagkogo raspredeleniya resursa propusknoi sposobnosti v setyakh besprovodnogo abonentskogo dostupa [Solving the problem of coloring a weighted graph for soft distribution of the bandwidth resource in wireless subscriber access networks]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severokavkazskii region. Tekhnicheskie nauki = Proceedings of Higher Educational Institutions. North Caucasian*

Region. Technical Science, 2015, no. 4 (185), pp. 3-8 (In Russ.). <https://doi.org/10.17213/0321-2653-2015-4-3-8>.

8. Makoshenko D.V. Naznachenie peremennykh na registry s pomoshch'yu drevovidnogo parametriceskogo algoritma raskraski grafa [Assigning Variables to Registers Using a Tree-like Parametric Graph Coloring Algorithm]. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technology*, 2010, no. 6, pp. 41-46 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=14998776>.

9. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. *Chapman & Hall/CRC*, 2006, 1016 p. <http://en.bookfi.net/book/643841>.

10. Garey M., Johnson D. *Vychislitelnyye mashiny i trudnoreshayemye zadachi* [Computers and Intractability]. Moscow, 1982. 416 p. (In Russ.). <https://b-ok.cc/book/437794/d9ea2f>.

11. Duffy, K., O'Connell, N., Sapozhnikov, A. Complexity analysis of a decentralised graph colouring algorithm. *Information Processing Letters*, July 2008, vol. 107, is. 2, pp. 60-63. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2008.01.002>.

12. Karaboga D.D. An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization. Technical Report-TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005. https://abc.erciyes.edu.tr/pub/tr06_2005.pdf.

13. Pham D.T., Ghanbarzadeh A., Koc E., Otri S., Rahim S., Zaidi M. The Bees Algorithm. Technical Note, Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, 2005. <https://doi.org/10.1016/B978-008045157-2/50081-X>.

14. Vatutin E.I., Titov V.S., Yemel'yanov S.G. *Osnovy diskretnoi kombinatornoi optimizatsii* [Basics of discrete combinatorial optimization]. Moscow, Argamak-Media Publ., 2016, 270 p. (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25770934>.

15. Yang X.S. Nature-inspired Metaheuristic Algorithms. Luniver Press, 2010, pp. 81-95. https://www.academia.edu/457296/Nature-inspired_metaheuristic_algorithms.

16. Karpenko A.P. *Sovremennyye algoritmy poiskovoi optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoj* [Modern search engine optimization algorithms. Algorithms inspired by nature]. Moscow, MGTU them. N.E. Bauman Publ., 2014. 446 p. (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25070137>.

17. Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technical Journal*, 1950, vol. 29, pp. 147-160. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x>.

18. Levenshteyn V.I. Dvoichnye kody s ispravleniem vypadenii, vstavok i zameshchenii simbolov [Binary Codes for Correcting Dropouts, Inserts, and Symbol Substitutions]. *Doklady akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1965, vol. 163, no. 4, pp. 845-848 (In Russ.). <http://mi.mathnet.ru/dan31411>.

19. Vatutin. E.I., Titov V.S. Osobennosti metaoptimizatsii algoritma pchelinoi kolonii v zadache poiska kratchaishego puti v grafe pri nalichii ogranichenii na plotnost' grafa [Features of meta-optimization of the bee colony algorithm in the task of finding the shortest path in a graph in the presence of restrictions on the graph density]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo*

gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University, 2016, no. 2 (19), pp. 52-65 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26396211>.

20. Pshenichnykh A.O., Gvozdeva S.N., Vatutin E.I. O vliyaniy poryadka rassmotreniya verшин pri poiske raskrasok grafov obshchego vida s ispol'zovaniem zhadnogo algoritma [On the influence of the order of consideration of vertices in the search for colorings of graphs of a general form using a greedy algorithm]. *Vysokoproizvoditel'nye vychislitel'nye sistemy i tekhnologii = High Performance Computing Systems and Technologies*, 2019, vol. 3, no. 1, pp. 101-106 (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39242603>.

Информация об авторах / Information about the Authors

Пшеничных Александр Олегович, магистрант кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: alex220697@mail.ru, ORCID: <http://0000-0003-4057-8862>

Pshenichnykh O. Aleksandr, Master Student of Computing Techniques Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: alex220697@mail.ru, ORCID: <http://0000-0003-4057-8862>

Ватутин Эдуард Игоревич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: evatutin@rambler.ru, ORCID: <http://0000-0002-7362-7387>, Researcher ID: C-9412-2017

Vatutin I. Eduard, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Computing Techniques Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: evatutin@rambler.ru, ORCID: <http://0000-0002-7362-7387>, Researcher ID: C-9412-2017