

# МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

## MECHANICAL ENGINEERING AND MACHINE SCIENCE

Оригинальная статья / Original article

УДК 62.52

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-3-10-25>



### Математическое моделирование силового взаимодействия экзоскелета и человека при реабилитации больных с повреждениями нижних конечностей

С.Ф. Яцун <sup>1</sup> , О.В. Емельянова <sup>1</sup>, Е.В. Савельева <sup>1</sup>, Г.А. Фурсов <sup>1</sup>

<sup>2</sup> Юго-Западный государственный университет  
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

 e-mail: teormeh@inbox.ru

#### Резюме

**Цель исследования.** Обеспечение заданной точности последовательных и параллельных движений в голеностопе, колене, бедре активного реабилитационного экзоскелета нижних конечностей с одновременной частичной разгрузкой голеностопного и коленного суставов от осевых нагрузок за счет установки одного из приводов вращательного движения на бедрном суставе. Задачи: разработка и реализация стратегии активно - пассивного движения (АПД), при которой фазы пассивного движения нижних конечностей (при этом, экзоскелет обеспечивает перемещение конечностей), сочетаются с фазами активного движения, когда сам пациент осуществляет желаемое движение, а экзоскелет ассистирует ему. Сравнительный анализ результатов экспериментов и оценка адекватности и применимости математической модели.

**Методы.** Исследование выполнено в соответствии с общепринятыми методами проведения и планирования экспериментальных исследований. При моделировании движения нижних конечностей учитываются параметры, характеризующие силовое взаимодействие экзоскелета и человека, что позволяет определять реакции в тазобедренном шарнире и синтезировать параметры системы управления с учетом внешних возмущающих воздействий.

**Результаты.** Разработана математическая модель движения нижних конечностей реабилитационного тренажерно - обучающего комплекса, отличающаяся от известных тем, что наряду с учетом кинематических и динамических особенностей движения звеньев реабилитационного устройства, учитываются параметры, характеризующие силовое взаимодействие экзоскелета и человека, что позволяет определять реакции в тазобедренном шарнире и синтезировать параметры системы управления с учетом внешних возмущающих воздействий.

**Заключение.** Предлагаемая в работе математическая модель и структура реабилитационного аппарата в виде плоского манипулятора – экзоскелета, оснащенного двумя приводами, один из которых совмещен с осью тазобедренного сустава человека, позволяет скомпенсировать влияние активных и реактивных сил, действующих на тазобедренный сустав человека при выполнении медицинских манипуляций.

**Ключевые слова:** математическая модель; экзоскелет; реабилитация; моделирование реабилитационного экзоскелета; разгрузка сустава.

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Финансирование:** Работа выполнена при поддержке Госзадания Минобрнауки России по теме «Разработка методов синтеза адаптивных и интеллектуальных робототехнических устройств и комплексов в целях расширения функциональных технологических и производственных возможностей человека» (соглашение № 075-03-2025-526).

**Для цитирования:** Математическое моделирование силового взаимодействия экзоскелета и человека при реабилитации больных с повреждениями нижних конечностей / С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова, Е.В. Савельева, Г.А. Фурсов // Известия Юго-Западного государственного университета. 2025; 29(3): 10-25. [https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-3-10-25](https://doi.org/10.21869/doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-3-10-25).

Поступила в редакцию 30.06.2025

Подписана в печать 21.07.2025

Опубликована 30.09.2025

## Mathematical modeling of the force interaction between an exoskeleton and a human in the rehabilitation of patients with lower limb injuries

Sergey F. Yatsun<sup>1</sup>✉, Oksana V. Emelyanova<sup>1</sup>, Ekaterina V. Saveleva<sup>1</sup>,  
Gavriil A. Fursov<sup>1</sup>

<sup>2</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: teormeh@inbox.ru

### Abstract

**Purpose of research.** Ensuring the specified accuracy of sequential and parallel movements in the ankle, knee, hip of an active rehabilitation exoskeleton of the lower extremities with simultaneous partial unloading of the ankle and knee joints from axial loads by installing one of the rotary motion actuators on the hip joint. **Tasks.** The development and implementation of an active - passive movement strategy (ADF), in which the phases of passive movement of the lower extremities (while the exoskeleton provides movement of the limbs) are combined with the phases of active movement, when the patient himself performs the desired movement, and the exoskeleton assists him. Comparative analysis of experimental results and assessment of the adequacy and applicability of the mathematical model.

**Methods.** The study was performed in accordance with generally accepted methods of conducting and planning experimental studies. When modeling the movement of the lower extremities, the parameters characterizing the force interaction of the exoskeleton and the human are taken into account, which makes it possible to determine reactions in the hip joint and synthesize the parameters of the control system taking into account external disturbing influences.

**Results.** A mathematical model of the movement of the lower extremities of a rehabilitation training complex has been developed, which differs from the known ones in that, along with taking into account the kinematic and dynamic features of the movement of the links of the rehabilitation device, parameters characterizing the force interaction of the exoskeleton and a person are taken into account, which makes it possible to determine reactions in the hip joint and synthesize the parameters of the control system taking into account external disturbing influences.

**Conclusion.** The mathematical model and structure of the rehabilitation device proposed in the paper in the form of a flat exoskeleton manipulator equipped with two actuators, one of which is aligned with the axis of the human hip joint,

*makes it possible to compensate for the influence of active and reactive forces acting on the human hip joint during medical manipulations.*

**Keywords:** mathematical model; exoskeleton; rehabilitation; modeling of rehabilitation exoskeleton.

**Conflict of interest.** The Authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**Funding:** The work was supported by the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the topic "Development of methods for the synthesis of adaptive and intelligent robotic devices and complexes in order to expand the functional technological and production capabilities of humans" (Agreement № 075-03-2025-526)

**For citation:** Jatsun S.F., Emelyanova O.V., Saveleva E.V., Fursov G.A. Mathematical modeling of the force interaction between an exoskeleton and a human in the rehabilitation of patients with lower limb injuries. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University.* 2025; 29(3): 10-25 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-3-10-25>.

Received 30.06.2025

Accepted 21.07.2025

Published 30.09.2025

\*\*\*

## Введение

Различные травмы опорно-двигательного аппарата являются одними из распространенных повреждений, полученных вследствие военных, промышленных, спортивных, дорожно-транспортных и др. происшествий, а также возрастных нарушений функций организма. Они могут приводить к полной или частичной инвалидности, поэтому процесс восстановления двигательных функций организма и возвращение к активной социальной и трудовой деятельности зависит от правильности лечения и своевременности проведения реабилитационных мероприятий.

Одним из способов восстановления и реабилитации таких больных является применение специальных тренажеров, которые представляют собой инновационные человеко-машинные комплексы, включающие задающие устройства различного типа (джойстики с обратной свя-

зью, копирующие экзоскелеты, пульты управления) и электромеханические системы управления. Такие комплексы повышают качество проведения медицинских процедур за счет придания мобильности пациенту с повреждением опорно-двигательного аппарата, при том, что исполнительный орган робота, например – экзоскелет, обеспечивает заданное движение нижних конечностей, с одновременным объективным контролем за состоянием пациента и оценкой окружающей пациенту среды [1]. Существенной проблемой является то, что в существующих реабилитационных тренажерах отсутствует система адаптации тестовых воздействий с учетом индивидуальных параметров пациента и информации об условиях взаимодействия прибора и стопы человека, что особенно важно при наличии контрактуры и спастики. Система управления реабилитационного комплекса должна обеспечивать как режим пассивного движения

в суставах, осуществляемого за счёт плавной и постепенной работы элементов аппарата, так и активного движения платформы, когда пациент самостоятельно выполняет движения с учетом параметров выбранного режима работы. Активный режим работы способствует восстановлению нейронных связей [2].

Рассмотрим некоторые аппараты, получившие распространение в области реабилитации нижних конечностей [3].

К активно-пассивным тренажерам нижних конечностей можно отнести:

– велотренажеры THERA-Trainer Tigo (Германия) (рис. 1, а), позволяющие осуществлять тренировки ослабленных мышц и уменьшать спастику, а так же улучшать кровообращение в конечностях<sup>1</sup>.

– беговые дорожки, степперы, отличающиеся от спортивных более низкой скоростью и небольшим шагом ее изменения, что позволяет пациенту держать ситуацию под контролем. Например Lokomat Nanos (Швейцария), LEXO (Австрия) (рис.1, б) и др. используемые для восстановления навыков ходьбы, оборудованы длинными поручнями и ремнями безопасности<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Реабилитационные тренажеры и их применение // Реабилитационные тренажеры: виды, модели, отличия, где и для чего применяются? URL: <https://www.kp.ru/guide/reabilitatsionnye-trenazhery.html>; Роботизированная механотерапия // Бека РУС; 2025. URL: <https://beka.ru/>

<sup>2</sup> Реабилитационное оборудование Ормед // Каталог реабилитационного оборудования и тренажеров; 2025. URL: <https://www.ormed.ru/katalog/APTROMOT® ACTIVE-K> // Тренажер для пассивной/активной разработки тазо-бедренного/коленного сустава. URL: <https://www.rusmedimport.com/catalog/rehabilitation/apparatus-dlya-nizhnih-konechnostey/artromot-active-k/>

– тренажеры для нижних конечностей, например линейка российских аппаратов «ОРМЕД FLEX», предназначены для проведения механотерапии тазобедренного, коленного и голеностопного суставов. Могут обеспечивать как постоянное пассивное движение, так и контролируемое активное движение одного или двух суставов, правильность которых отслеживается с помощью тензодатчика (рис. 1, в). Используются для предотвращения осложнений после переломов, травм, а также лечения заболевания суставов в послеоперационном периоде и др.<sup>3</sup>.

Линейка механотерапевтических реабилитационных аппаратов от компании «ARTROMOT» (Германия), используется как для непрерывной, разработки одного, так и для двух суставов, например коленного и (ARTROMOT ACTIVE-K) (рис. 1, г), принцип действия которого основан на использовании биологической обратной связи [4, 5].

Обзор существующих мехатронных реабилитационных аппаратов, разрешенных к применению, достаточно ограничен и в основном их использование основание на непрерывном, пассивном движении нижних конечностей. Некоторые модели могут одновременно обеспечивать движения в двух суставах, например голеностопном и коленном, причем привод расположен на пятке, которая

<sup>3</sup> Rehabilitation simulator for ankle joint development Kinetec Breva Ankle CPM; URL: <https://medtehnika-1.ru/reabilitatsionnyi-trenager-kinetec-breva-ankle-cpm>

находится в возвратно-поступательном движении. Это вызывает избыточное осевое воздействие на коленный и тазобедренный суставы.

Целью исследований является обеспечение заданной точности последовательных и параллельных движений в го-

леностопе, колене, бедре активного реабилитационного экзоскелета нижних конечностей с одновременной частичной разгрузкой голеностопного и коленного суставов от осевых нагрузок за счет установки одного из приводов вращательного движения на бедренном суставе.



**Рис. 1.** Механотерапевтические реабилитационные тренажеры: **а** – THERA-Trainer Tigo; **б** – LEXO; **в** – ОРМЕД FLEX -F01BA; **г** – ARTROMOT ACTIVE-K

**Fig. 1.** Mechanotherapy rehabilitation simulators: **a** – THERA-Trainer Tigo; **b** – LEXO; **c** – ОРМЕД FLEX -F01BA; **d** – ARTROMOT ACTIVE-K

Для этого необходимо разработать и реализовать стратегию активно - пассивного движения (АПД), при которой фазы пассивного движения нижних конечностей (при этом, экзоскелет обеспечивает перемещение конечностей), сочетаются с фазами активного движения, ко-

гда сам пациент осуществляет желаемое движение, а экзоскелет ассирирует ему [6, 7, 8].

### Материалы и методы

Рассмотрим схему движения человека в реабилитационном аппарате –

экзоскелете. В общем случае, наиболее эффективно реабилитация проходит при одновременном воздействии на несколько суставов нижних конечностей. Обобщенная расчетная схема устройства в виде плоского манипулятора представлена на рис. 2. Он состоит из 3-х звеньев: звено 1 установлено на стойке с помощью активного цилиндрического шарнира; звено 2 связывает первый и третий звенья с помощью активных шарниров.

Звено 3 обеспечивает движение точки *C* пятки стопы пациента в экзоскелете, которое происходит по опорной плоской поверхности *nm*. Возможен вариант как подвижной, в вертикальной плоскости ( $b \neq \text{const}$ ), так и не подвижной поверхности ( $b = \text{const}$ ). Точками *O*, *A*, *B* обозначены шарниры экзоскелета, совпадающие с суставами человека: бедерным, коленным и голеностопным соответственно [8, 9, 10].

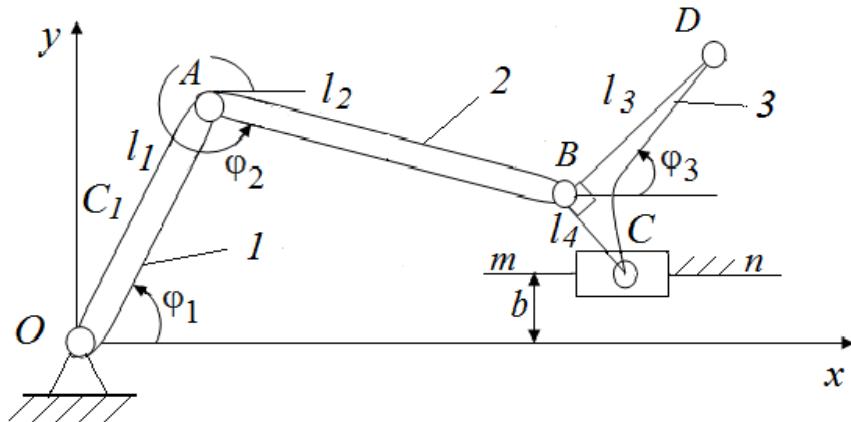


Рис. 2. Кинематическая схема плоского манипулятора – экзоскелета

Fig. 2. Kinematic scheme of a flat manipulator exoskeleton

Данный реабилитационный аппарат – экзоскелет оснащен двумя приводами. Один из них обеспечивает поворот стопы относительно голени, Второй – поворот бедра относительно точки *O*, при этом точка *C* перемещается вдоль оси *Ox*. Таким образом, данное реабилитационное устройство позволяет реализовать следующие режимы движения:

- 1) реабилитация коленного и тазобедренного суставов;
- 2) реабилитация голеностопного сустава;
- 3) реабилитация коленного, тазобедренного и голеностопного суставов.

Проведем математическое моделирование экзоскелета с шарнирами *O*, *A*, *B* в сагиттальной плоскости [11].

Рассмотрим режим, при котором голеностопный сустав неподвижен  $\varphi_3 = \text{const}$ . В этом случае система имеет одну степень свободы. Её движение происходит за счет движения точки *C* по прямой *nm*, соответственно точка *B* также совершает прямолинейное поступательное движение.

Проведем кинематический анализ экзоскелета, который позволит установить связи между шарнирами [8, 10, 12].

Определим кинематические характеристики центров масс звеньев  $OA$  и  $AB$ :

$$x_{C1} = \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1; \quad y_{C1} = \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1; \quad (1)$$

$$\dot{x}_{C1} = -\frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1; \quad \dot{y}_{C1} = \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1; \quad (2)$$

$$\ddot{x}_{C1} = -\frac{l_1}{2} (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1); \\ \ddot{y}_{C1} = \frac{l_1}{2} (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1); \quad (3)$$

$$x_{C2} = l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2; \\ y_{C2} = l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2; \quad (4)$$

$$\dot{x}_{C2} = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2; \\ \dot{y}_{C2} = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2; \quad (5)$$

$$\ddot{x}_{C2} = -l_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - \\ - \frac{l_2}{2} (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2); \quad (6)$$

$$\ddot{y}_{C2} = l_1 (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) - \\ - \frac{l_2}{2} (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2). \quad (7)$$

Поскольку величины  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  взаимосвязаны, их начальные значения необходимо предварительно согласовать.

Кинематические характеристики точки  $C_3$  в прямолинейном поступательном движении, при  $y_{C3} = b_3$ :

$$x_{C3} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + x_{BC3}; \\ y_{C3} = b_3 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + y_{BC3}; \quad (8)$$

$$\dot{x}_{C3} = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2; \quad (9)$$

$$\ddot{x}_{C3} = -l_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - \\ - l_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2). \quad (10)$$

Из (8) получим формулу, связывающую углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{l_2} (b_3 - l_1 \sin \varphi_1), \quad (11)$$

тогда:

$$\varphi_2 = \begin{cases} \arcsin \left( \frac{b_3 - l_1 \sin \varphi_1}{l_2} \right), & \text{если } b_3 - l_1 \sin \varphi_1 \geq 0; \\ 2\pi + \arcsin \left( \frac{b_3 - l_1 \sin \varphi_1}{l_2} \right), & \text{если } b_3 - l_1 \sin \varphi_1 < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим движение манипулятора-экзоскелета под действием управляемого момента  $M$ , момента сопротивления мышечной системы  $M_C$ , действующих на звено  $OA$ , сил тяжести  $G_1, G_2, G_3$  – бедра, голени и стопы приложенных в соответствующих центрах масс звеньев  $C_1, C_2, C_3$  (рис.3).

Для получения дифференциального уравнения, описывающего движение манипулятора - экзоскелета под действием управляемого момента  $M$ , воспользуемся уравнением Лагранжа II рода [8, 13]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (13)$$

С учетом сил и моментов сопротивления, действующих на звенья манипулятора, обобщенные силы примут вид [8, 9, 14, 15]:

$$Q_i = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \delta q_i}{\delta q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad (14)$$

где  $T$ ,  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергии системы;  $\Phi$  – диссипативная функция Рэлея;  $q_i = \varphi_1$  – обобщенная координата:

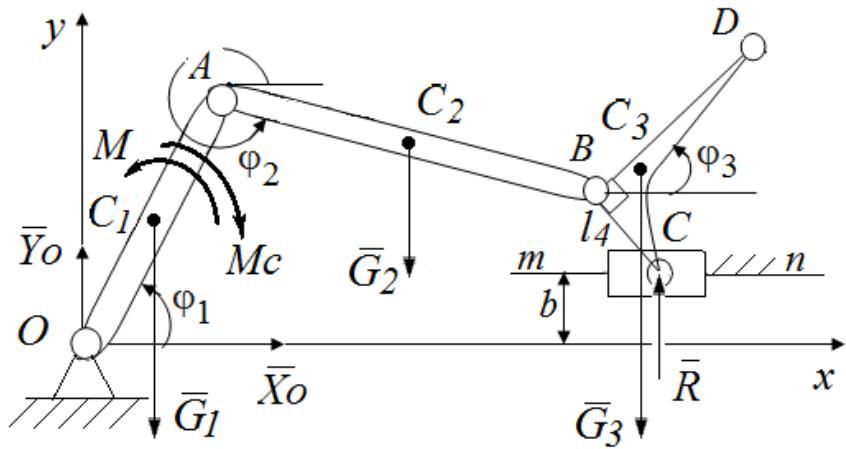


Рис. 3. Расчетная схема манипулятора – экзоскелета:  $\bar{X}o$ ,  $\bar{Y}o$  – реакции в шарнире  $O$ ;  $\bar{R}$  – реакция опорной поверхности

Fig. 3. Calculation scheme of the exoskeleton manipulator:  $\bar{X}o$ ,  $\bar{Y}o$  – reactions in the hinge  $O$ ;  $\bar{R}$  – reaction of the support surface

В предположении отсутствия мышечного тонуса, диссипативная функция Рэлея и ее производная, представляющая собой момент сопротивления  $M_C$ , имеют вид:

$$\Phi = \frac{\mu \dot{\phi}_1^2}{2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}_1} = \mu \dot{\phi}_1, \quad (15)$$

где  $\mu$  – реологический параметр, определяющие физико-механические свойства мышечной системы нижних конечностей пациента.

Определив кинетическую и потенциальную энергию и их производные, подставив в уравнение (13) получим дифференциальное уравнение, описывающее движение экзоскелета под действием управляющего момента  $M$ :

$$\begin{aligned} J_{10} * \ddot{\phi}_1 - \frac{m_2}{2} l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) - \\ - \frac{m_2}{2} l_1 l_2 \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 + \phi_2) = \\ = M - \mu \dot{\phi}_1 - G_1 \frac{l_1}{2} \cos \phi_1 - \\ - G_2 (l_1 \cos \phi_1 - \frac{l_2}{2} \cos \phi_2) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим силы, действующие в тазобедренном шарнире  $Xo$ ,  $Yo$  и реакцию  $R$  опоры в точке  $C$  методом Даламбера. Силы инерции, приложенные в точках  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $B$ , силы тяжести  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , управляющий момент  $M$  и реакция  $R$  образуют произвольную плоскую уравновешенную систему сил. Условием равновесия которой являются уравнения [5]:

$$\begin{cases} \sum X_i = X_O + F_{C_1}^x + F_{C_2}^x + F_{C_3}^x = 0; \\ \sum Y_i = Y_O + F_{C_1}^y + F_{C_2}^y + F_{C_3}^y - G_1 - G_2 - G_3 + R = 0; \\ \sum M_{oi} = M + M_O(F_{C_1}) + M_O(F_{C_2}) + M_O(F_{C_3}) + M_O(G_1) + \\ + M_O(G_2) + M_O(G_3) + M_O(R) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Определим силы инерции с учетом ускорений точек  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , определенные в (3), (6), (7), (10):

$$F_{C_1}^x = m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1);$$

$$F_{C_2}^x = m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \left[ -l_1 (\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1) - \frac{l_2}{2} (\ddot{\phi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) \right]; \quad (18)$$

$$F_{C_3}^x = m_3 \ddot{x}_3 = m_3 (-l_1 \ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2); \quad (19)$$

$$F_{C_1}^y = m_1 \ddot{y}_1 = m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - (\dot{\phi}_1)^2 \sin \varphi_1);$$

$$F_{C_2}^y = m_2 \ddot{y}_2 = m_2 (l_1 \dot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2); \quad (20)$$

$$F_{C_3}^y = m_3 \ddot{y}_3 = 0.$$

Определим моменты сил инерции относительно точки  $O$ :

$$M_O(F_{C_1}) = m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1) \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 - m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1) \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1; \quad (21)$$

$$M_O(F_{C_2}) = m_2 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) (l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2) +$$

$$+ m_2 (l_1 \ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \ddot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2) (l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2); \quad (22)$$

$$M_O(F_{C_3}) = m_3 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) b. \quad (23)$$

Подставим полученные выражения в уравнения (17):

$$\sum X_i = X_O + m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1) + m_2 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 -$$

$$- \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) + m_3 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) = 0; \quad (24)$$

$$\sum Y_i = Y_O + m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1) + m_2 (l_1 \dot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 +$$

$$+ \frac{l_2}{2} \ddot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2) - G_1 - G_2 - G_3 + R = 0. \quad (25)$$

$$\sum M_{oi} = M + m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1) \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1 -$$

$$- m_1 \frac{l_1}{2} (\ddot{\phi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1) \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 + m_2 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 -$$

$$- \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) (l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2) + m_2 (l_1 \dot{\phi}_1 \cos \varphi_1 -$$

$$- l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \ddot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2) (l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2) +$$

$$m_3 (-l_1 \dot{\phi}_1 \sin \varphi_1 - l_1 \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \dot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - l_2 \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2) b + M_O(G_1) +$$

$$+ M_O(G_2) + M_O(G_3) + M_O(R) = 0. \quad (26)$$

## Результаты и их обсуждение

Математическая модель, представленная в виде уравнений (24) – (26) является виртуальным двойником экзоскелета и позволяет решать две задачи: 1 – по заданному закону изменения управляющего момента  $M(t)$ , определяем закон изменения угла поворота  $\varphi_1(t)$ ; 2 – синтез параметров электроприводов манипулятора, по заданным законам изменения обобщенных координат  $\varphi_1(t)$  рассчитываем момент  $M(t)$ .

Получив выражение  $M(t)$ , можно определить зависимость мощности электропривода в шарнире  $O$  манипулятора от времени.

$$P_1(t) = M(t) \dot{\varphi}_1(t).$$

Максимальное значение мощности найдем исходя из условий:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1(t_0) = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_1(t_0) \geq 0.$$

Значение  $t = t_0$  соответствует максимуму функции  $P_1(t)$ .

Определив максимальные значения мощностей, можно подобрать электродвигатели, и определить токи, которые обеспечат данные моменты.

Графики зависимости требуемой механической мощности  $P_1$  и управляющего момента  $M$  от времени  $t$  в тазобедренном шарнире приведены на рис. 4. Для  $M(t) = mt; t \in [0, T]; m = 3; T = 2$ .

В результате моделирования получим зависимости углов поворота тазобедренного шарнира  $\varphi_1$  и голеностопного  $\varphi_2$  от времени, а также их скоростей

$\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$  и ускорений  $\ddot{\varphi}_1(t), \ddot{\varphi}_2(t)$  для различных физико-механических свойств мышечной системы пациента  $\mu$  (рис. 5, 6).

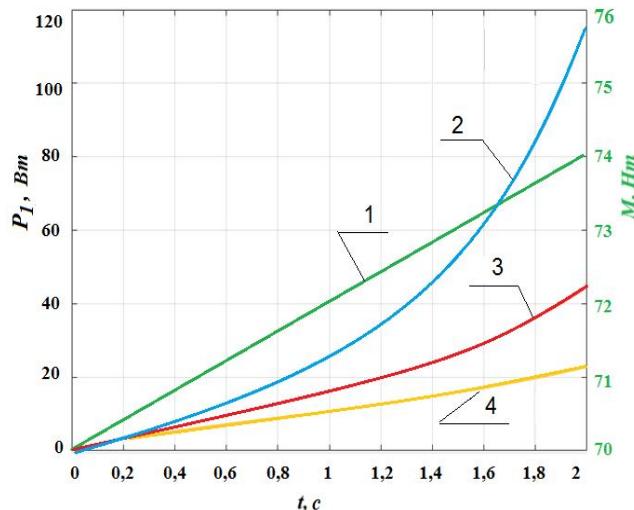


Рис. 4. Графики зависимостей:

1 – управляющего момента  $M$  и 2-4 требуемой механической мощности  $P_1$ , от времени  $t$  в тазобедренном шарнире для различных значений реологического параметра мышц  $\mu$ :  
2 –  $\mu=0$ ; 3 –  $\mu=25$ ; 4 –  $\mu=50$

Fig. 4. Dependency graphs: 1 – the control torque  $M$  and 2-4 of the required mechanical power  $P_1$  from the time  $t$  in the hip joint for different values of the rheological parameter of the muscles  $\mu$ :  
2 –  $\mu=0$ ; 3 –  $\mu=25$ ; 4 –  $\mu=50$

На основании полученных данных рис. 5, 6 рассмотрим изменение конфигурации экзоскелета при выполнении упражнений (рис. 7).

На графиках рис. 7 видно, что угол  $\varphi_1$  не превышает  $75^\circ$ , что соответствует наложенным на испытуемого ограничениям. Следовательно, экзоскелет выполняет движения под действием заданного момента  $M(t)$ , не превышая диапазон углов поворота звеньев, ограниченных анатомическими особенностями человека.

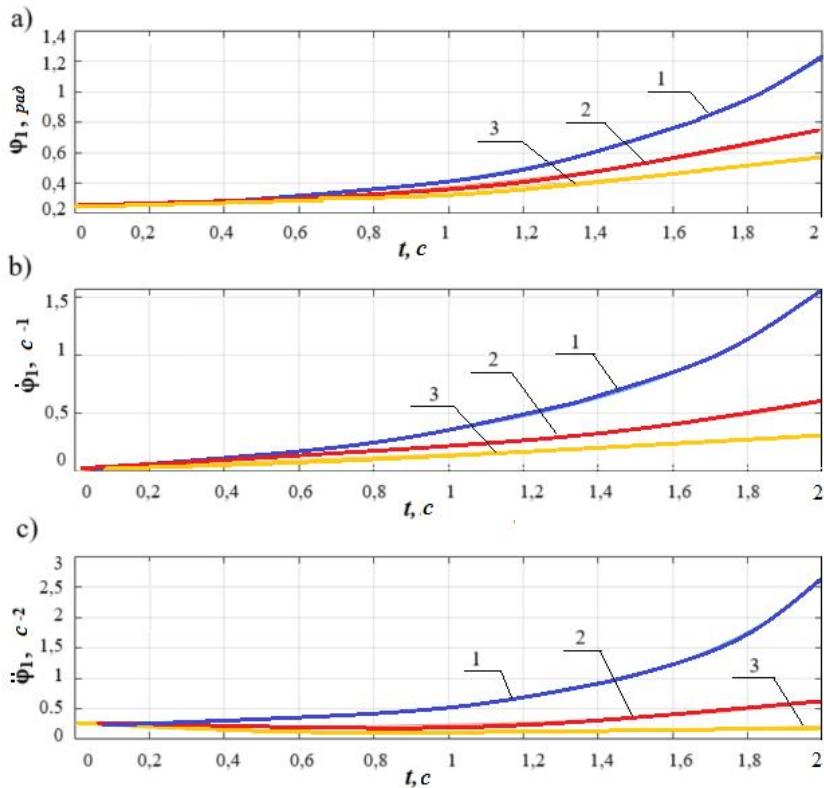


Рис. 5. Графики изменения: **a** –  $\varphi_1$ ; **b** –  $\dot{\varphi}_1$ ; **c** –  $\ddot{\varphi}_1$  от времени  $t$  для **1** –  $\mu=0$ ; **2** –  $\mu=25$ ; **3** –  $\mu=50$

Fig. 5. Graphs of changes: **a** –  $\varphi_1$ ; **b** –  $\dot{\varphi}_1$ ; **c** –  $\ddot{\varphi}_1$  from time  $t$  for **1** –  $\mu=0$ ; **2** –  $\mu=25$ ; **3** –  $\mu=50$

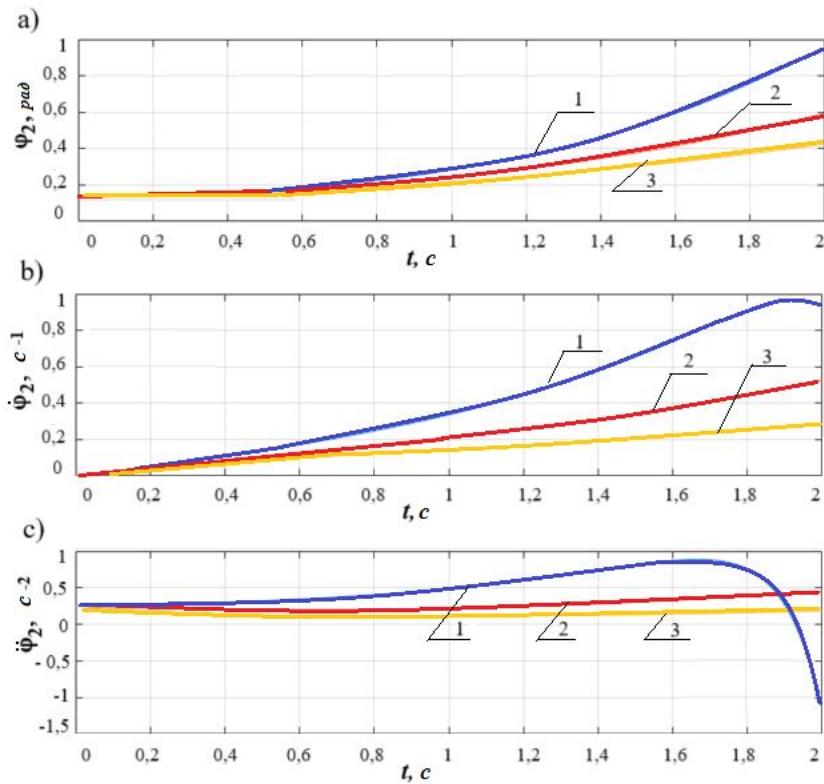


Рис. 6. Графики изменения: **a** –  $\varphi_2$ ; **b** –  $\dot{\varphi}_2$ ; **c** –  $\ddot{\varphi}_2$  от времени  $t$  для **1** –  $\mu=0$ ; **2** –  $\mu=25$ ; **3** –  $\mu=50$

Fig. 6. Graphs of changes: **a** –  $\varphi_2$ ; **b** –  $\dot{\varphi}_2$ ; **c** –  $\ddot{\varphi}_2$  from time  $t$  for **1** –  $\mu=0$ ; **2** –  $\mu=25$ ; **3** –  $\mu=50$

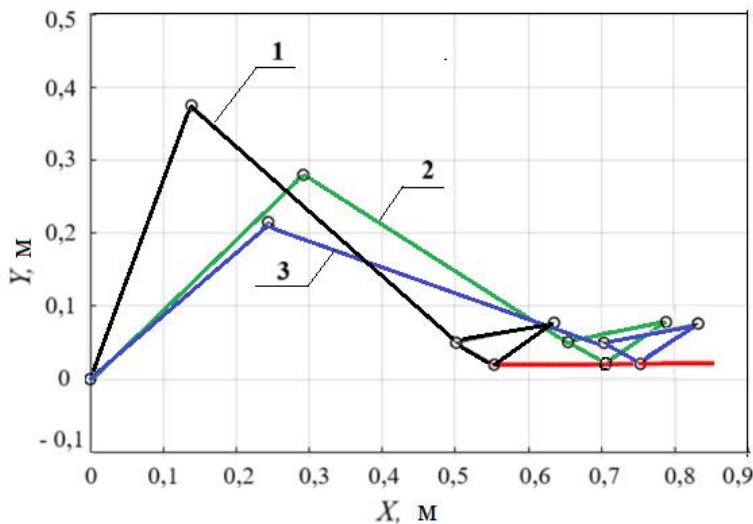


Рис. 7. График изменения конфигурации экзоскелета при: 1 –  $\mu=0$ ; 2 –  $\mu=25$ ; 3 –  $\mu=50$

Fig. 7. Graph of changes in the configuration of the exoskeleton at: 1 –  $\mu=0$ ; 2 –  $\mu=25$ ; 3 –  $\mu=50$

Наблюдается существенная зависимость характера движения (объем движений в суставах) от параметра  $\mu$ , определяющего момент сопротивления мышечной системы. Исследование влияния реологического параметра  $\mu$ , на величину

реакций  $X_0$ ,  $Y_0$ , действующих в тазобедренном суставе, и реакции  $R$  показывает значительное уменьшение этих реакций с ростом  $\mu$ , связанных с падением объема движений в конечности (рис. 8).

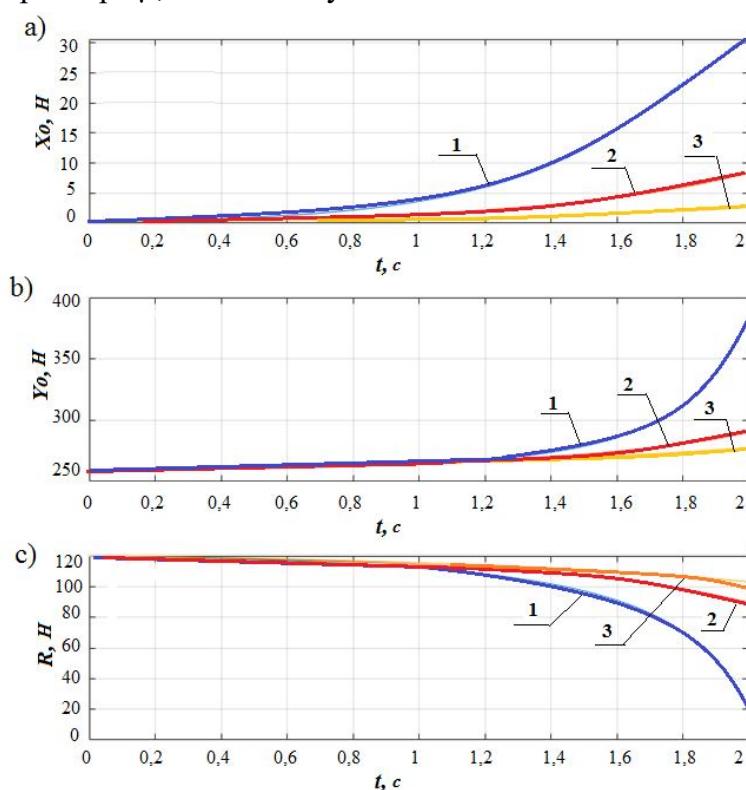


Рис. 8. Графики изменения реакций: а –  $X_0$ ; б –  $Y_0$ ; в –  $R$  от времени  $t$  для 1 –  $\mu=0$ ; 2 –  $\mu=25$ ; 3 –  $\mu=50$

Fig. 8. Graphs of reaction changes: a –  $X_0$ ; b –  $Y_0$ ; c –  $R$  from time  $t$  for 1 –  $\mu=0$ ; 2 –  $\mu=25$ ; 3 –  $\mu=50$

## Выводы

1. Проведенный анализ технических решений реабилитационного тренажерно-обучающего комплекса для реабилитации пациентов с нарушениями функций нижних конечностей показал, что применение существующих линейных приводных систем приводит к появлению значительных силовых воздействий в тазобедренном суставе, что снижает эффективность процесса реабилитации.

2. Разработана структура реабилитационного аппарата в виде плоского экзоскелета, оснащенного двумя приводами, один из которых совмещен с осью тазобедренного сустава человека. Такая схема позволяет скомпенсировать влияние активных и реактивных сил, действующих на тазобедренный сустав человека при выполнении медицинских манипуляций.

3. Разработана математическая модель реабилитационного экзоскелета, отличающаяся от известных тем, что наряду с учетом кинематических и динамических особенностей движения звеньев реабилитационного устройства, учитываются параметры, характеризующие взаимодействие экзоскелета и человека, что позволяет определять реакции в тазобедренном шарнире и синтезировать параметры системы управления с учетом внешних возмущающих воздействий.

Установлено, что при линейном изменении управляющего момента происходит нелинейное изменение угловой скорости движения и как следствие снижение потребляемой мощности электропривода тазобедренного шарнира.

## Список литературы

1. Knyazev A. A., Yatsun A. S., Fedorov A. V. Information systems of the device for active-passive mechanotherapy of the ankle joint // International Journal of Open Information Technologies. 2023. Vol. 11, № 4. P. 47-54.
2. Bonato P., Reinkensmeyer D., Manto M. Two decades of breakthroughs: charting the future of NeuroEngineering and Rehabilitation // Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation. 2025. Vol. 22, № 1. P. 1-2. <https://doi.org/10.1186/s12984-025-01580-5>.
3. Shi D. et al. A review on lower limb rehabilitation exoskeleton robots // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2019. Vol. 32, № 1. P. 1-11. <https://doi.org/10.1186/s10033-019-0389-8>.
4. Sanchez-Manchola M. et al. Development of a robotic lower-limb exoskeleton for gait rehabilitation: AGoRA exoskeleton // 2018 IEEE ANDESCON. – IEEE, 2018. P. 1-6. DOI: 10.1109/ANDESCON.2018.8564692.

5. Different profiles of upper limb function in four types of neuromuscular disorders / A. Bergsma, M. M. Janssen, A. C. Geurts, E. H. Cup, I. J.. de Groot // Neuromuscular disorders. 2017. Vol. 27(12). P. 1115-1122. <https://doi.org/10.1016/j.nmd.2017.09.003>
6. The assistive gait devices and their implementation in activities of daily living for patients with neuromuscular disease: A systematic review and meta-analysis / M. Mijic, C. Wirner-Piotrowski, A. Jung, K. Gutschmidt, M. Arndt, N. García-Angarita, ... B. Schoser // Journal of Neuromuscular Diseases. 2024. P. 22143602241289216. DOI: 10.1177/22143602241289216
7. Павловский М. А., Акинфеева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. Киев: Выща шк., 1990. 480 с.
8. Safarov D. I., Tistsov E. D., Yatsun S. F. Simulation of interaction between a person and a rehabilitation exoskeleton // International Journal of Open Information Technologies. 2024. Vol. 12, №. 4. P. 108-115. DOI: 10.25559/INJOIT.2307-8162.12.202404.108-115.
9. Emelyanova O., Tistsov E., Jatsun S. Automation Control of the Movement of Robotic Device for Patient Positioning // International Russian Automation Conference (RusAutoCon). IEEE, 2024. P. 537-542. DOI: 10.1109/RusAutoCon61949.2024.10693953.
10. Jatsun S., Emelyanova O., Fursov G. Modeling of Controlled Motion of a Rehabilitation Exoskeleton for the Lower Extremities // International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). IEEE, 2025. P. 682-687. DOI: 10.1109/ICIEAM65163.2025.11028542.
11. The effectiveness of wearable upper limb assistive devices in degenerative neuromuscular diseases: A systematic review and meta-analysis / M. Gandolla, A. Antonietti, V. Longatelli, A. Pedrocchi // Frontiers in bioengineering and biotechnology. 2020. Vol. 7. P. 450. <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00450>.
12. Muramatsu H., Katsura S. Repetitive motion-reproduction based on a motion-copying system for automation of human motions // 2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). IEEE, 2017. P. 1443-1446. DOI: 10.23919/SICE.2017.8105611.
13. Miura K., Matsui A., Katsura S. Synthesis of motion-reproduction systems based on motion-copying system considering control stiffness // IEEE/ASME Transactions On Mechatronics. 2015. Vol. 21, № 2. P. 1015-1023. DOI: 10.1109/TMECH.2015.2478897.
14. Monitoring contact behavior during assisted walking with a lower limb exoskeleton / X. Wan, Y. Liu, Y. Akiyama, Y. Yamada // IEEE transactions on neural systems and rehabilitation engineering. 2020. Vol. 28, no. 4. P. 869-877. DOI: 10.1109/TNSRE.2020.2979986.
15. Bembli S., Haddad N. K., Belghith S. Computer aided decision model to control an exoskeleton-upper limb system // International conference on advanced systems and emergent technologies (IC\_ASET). IEEE. Hammamet, Tunisia, 2019. P. 166-172. DOI: 10.1109/ASET.2019.8871010.

## References

1. Knyazev A. A., Yatsun A. S., Fedorov A. V. Information systems of the device for active-passive mechanotherapy of the ankle joint. *International Journal of Open Information Technologies*. 2023; 11(4): 47-54.
2. Bonato P., Reinkensmeyer D., Manto M. Two decades of breakthroughs: charting the future of NeuroEngineering and Rehabilitation. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. 2025; 22(1): 1-2. <https://doi.org/10.1186/s12984-025-01580-5>.
3. Shi D., et al. A review on lower limb rehabilitation exoskeleton robots. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2019; 32(1): 1-11. <https://doi.org/10.1186/s10033-019-0389-8>.
4. Sanchez-Manchola M., et al. Development of a robotic lower-limb exoskeleton for gait rehabilitation: AGoRA exoskeleton. *2018 IEEE ANDESCON*. IEEE, 2018. P. 1-6. DOI: 10.1109/ANDESCON.2018.8564692.
5. Bergsma, A., Janssen, M. M., Geurts, A. C., Cup, E. H., & de Groot, I. J.. Different profiles of upper limb function in four types of neuromuscular disorders. *Neuromuscular disorders*. 2017; 27(12): 1115-1122. <https://doi.org/10.1016/j.nmd.2017.09.003>
6. Mijic M., Wirner-Piotrowski C., Jung A., Gutschmidt K., Arndt M., García-Angarita N., ... & Schoser B. The assistive gait devices and their implementation in activities of daily living for patients with neuromuscular disease: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Neuromuscular Diseases*. 2024; 22143602241289216. DOI: 10.1177/22143602241289216
7. Pavlovsky M. A., Akinfieva L. Yu., Boychuk O. F. Theoretical mechanics. Dynamics. Kiev, 1990. 480 p. (In Russ.).
8. Safarov D. I., Tistsov E. D., Yatsun S. F. Simulation of interaction between a person and a rehabilitation exoskeleton. *International Journal of Open Information Technologies*. 2024; 12(4): 108-115. DOI: 10.25559/INJOIT.2307-8162.12.202404.108-115.
9. Emelyanova O., Tistsov E., Jatsun S. Automation Control of the Movement of Robotic Device for Patient Positioning. *International Russian Automation Conference (RusAuto-Con)*. IEEE. 2024. P. 537-542. DOI: 10.1109/RusAutoCon61949.2024.10693953.
10. Jatsun S., Emelyanova O., Fursov G. Modeling of Controlled Motion of a Rehabilitation Exoskeleton for the Lower Extremities. *International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. IEEE. 2025. P. 682-687. DOI: 10.1109/ICIEAM65163.2025.11028542
11. Gandolla, M., Antonietti, A., Longatelli, V., & Pedrocchi, A.. The effectiveness of wearable upper limb assistive devices in degenerative neuromuscular diseases: A systematic review and meta-analysis. *Frontiers in bioengineering and biotechnology*. 2020; 7: 450. <https://doi.org/10.3389/fbioe.2019.00450> .
12. Muramatsu H., Katsura S. Repetitive motion-reproduction based on a motion-copying system for automation of human motions. *2017 56th Annual Conference of the Soci-*

ety of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). IEEE, 2017. P. 1443-1446. DOI: 10.23919/SICE.2017.8105611.

13. Miura K., Matsui A., Katsura S. Synthesis of motion-reproduction systems based on motion-copying system considering control stiffness. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*. 2015. 21(2): 1015-1023. DOI: 10.1109/TMECH.2015.2478897.

14. Wan X., Liu Y., Akiyama Y., Yamada Y. Monitoring contact behavior during assisted walking with a lower limb exoskeleton. *IEEE transactions on neural systems and rehabilitation engineering*. 2020. 28(4): 869-877. DOI: 10.1109/TNSRE.2020.2979986.

15. Bembli, S., Haddad, N. K., Belghith, S. Computer aided decision model to control an exoskeleton-upper limb system. *International conference on advanced systems and emergent technologies (IC\_ASET)*. IEEE. Hammamet, Tunisia, 2019. P. 166-172. DOI: 10.1109/ASET.2019.8871010.

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Яцун Сергей Фёдорович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой мехатроники, мехатроники и робототехники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: teormeh@inbox.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7420-0772>

**Емельянова Оксана Викторовна**, кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6067-3114>

**Савельева Екатерина Владимировна**, преподаватель, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: teormeh@inbox.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5993-3791>

**Фурсов Гавриил Анатольевич**, студент, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: from.skveki1@mail.ru

**Sergey F. Yatsun**, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Head of Mechanics, Mechatronics and Robotics Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: teormeh@inbox.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7420-0772>

**Oksana V. Emelyanova**, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Mechanics, Mechatronics and Robotics Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6067-3114>

**Ekaterina V. Saveleva**, Lecturer, Mechanics, Mechatronics and Robotics Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: katyasavelkursk@yandex.ru

**Gavriil A. Fursov**, Student, Mechanics, Mechatronics and Robotics Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: from.skveki1@mail.ru