

УДК 004.93

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-130-145>

## Повышение скорости вейвлет-обработки изображений на основе метода Винограда с учетом децимации

П. А. Ляхов <sup>1</sup> ✉

<sup>1</sup> Северо-Кавказский федеральный университет  
ул. Пушкина, д. 1, г. Ставрополь 355017, Российская Федерация

✉ e-mail: [ljahov@mail.ru](mailto:ljahov@mail.ru)

### Резюме

**Цель исследования.** Вейвлет-преобразование находит широкое применение при решении широкого круга задач цифровой обработки изображений в различных прикладных и научно-технических областях. В то же время, современные системы обработки визуальной информации сталкиваются с проблемой недостаточной производительности на фоне стремительного увеличения объёмов цифровых данных. Указанное обстоятельство требует разработки вычислительно эффективных алгоритмов вейвлет-обработки, пригодных для реализации в составе современных вычислительных устройств. Данное исследование направлено на снижение вычислительной сложности выполнения вейвлет обработки изображений на основе использования модификации метода Винограда. В статье предлагается применение нового подхода для организации вычислений при одномерной фильтрации с децимацией.

**Методы.** В исследовании применялся метод организации вычислений на основе преобразования Винограда и аппаратное моделирование на программируемой вентильной матрице в среде Xilinx Vivado 2018.2 с использованием языка Verilog для семейства Virtex 7 модель «xc7vx485tffg1157-1», с применением стандартных параметров синтеза и реализации: «Vivado Synthesis Defaults» и «Vivado Implementation Defaults» соответственно.

**Результаты.** Экспериментальное моделирование вейвлет-преобразования продемонстрировало, что применение метода Винограда в задачах вейвлет-обработки изображений позволяет снизить вычислительную задержку на 34-63 % по сравнению с прямым методом при использовании вейвлетов четвёртого порядка и на 39-66 % при использовании вейвлетов шестого порядка.

**Заключение.** Применение метода Винограда обеспечивает существенное увеличение скорости вычислений при некотором росте аппаратной сложности и энергопотребления. Результаты исследования могут найти широкое применение в современных системах обработки сигналов, изображений и видео, а также при разработке систем машинного обучения.

**Ключевые слова:** параллельные вычисления; цифровая обработка изображений; дискретное вейвлет-преобразование; метод Винограда; аппаратная реализация цифровых фильтров.

**Конфликт интересов:** Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Ляхов П. А. Повышение скорости вейвлет-обработки изображений на основе метода Винограда с учетом децимации // Известия Юго-Западного государственного университета. 2025; 29(2): 130-145. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-130-145>.

Поступила в редакцию 25.04.2025

Подписана в печать 03.06.2025

Опубликована 23.07.2025

## Increasing the speed of wavelet image processing based on the Winograd method taking into account decimation

Pavel A. Lyakhov <sup>1</sup> ✉

<sup>1</sup> North-Caucasus Federal University  
1, Pushkin str., Stavropol 355017, Russian Federation

✉ e-mail: ljahov@mail.ru

### Abstract

**Purpose of research.** Wavelet transform is widely used to solve a wide range of digital image processing problems in various applied and scientific and technical fields. At the same time, modern visual information processing systems face the problem of insufficient performance against the background of a rapid increase in digital data volumes. This circumstance requires the development of computationally efficient wavelet processing algorithms suitable for implementation in modern computing devices. This study is aimed at reducing the computational complexity of wavelet image processing based on the use of a modification of the Winograd method. The article proposes the use of a new approach to organizing calculations for one-dimensional filtering with decimation.

**Methods.** The study used a method for organizing calculations based on the Winograd transform and hardware simulation on a programmable valve matrix in Xilinx Vivado 2018.2 environment using Verilog language for Virtex 7 family model "xc7vx485tffg1157-1", using standard synthesis and implementation parameters: "Vivado Synthesis Defaults" and "Vivado Implementation Defaults", respectively.

**Results.** Experimental modeling of the wavelet transform has demonstrated that the application of the Winograd method in wavelet image processing tasks allows for a reduction the computational delay by 34-63% compared to the direct method when using fourth-order wavelets and by 39-66% when using sixth-order wavelets.

**Conclusion.** The application of the Winograd method provides a significant increase in the computation speed with some increase in hardware complexity and energy consumption. The results of the study can find wide application in modern signal, image and video processing systems, as well as in the development of machine learning systems.

**Keywords:** parallel computing; digital image processing; discrete wavelet transform; Winograd method; hardware implementation of digital filters.

**Conflict of interest.** The Author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Lyakhov P. A. Increasing the speed of wavelet image processing based on the Winograd method taking into account decimation // *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2025; 29(2): 130-145 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-130-145>.

Received 25.04.2025

Accepted 03.06.2025

Published 23.07.2025

\*\*\*

### Введение

В настоящее время вейвлет-преобразование активно применяется для решения широкого спектра задач в области

обработки изображений, включая подавление шумов [1], восстановление изображений [2], их анализ [3], а также обработку видеоданных [4]. На практике алго-

ритмы вейвлет-анализа обычно основаны на дискретном вейвлет-преобразовании посредством одномерной цифровой фильтрации [5], которая предполагает множественные операции свёртки, включающие повторяющиеся вычисления сложений и умножений, что влечет высокую вычислительную сложность преобразований [6, 7]. Экспоненциальный рост объёмов цифровой визуальной информации в настоящее время требует все более эффективной обработки, хранения и передачи. Современные системы обработки изображений испытывают сложности, связанные с недостаточной производительностью имеющихся вычислительных средств [8]. Одним из направлений повышения производительности вычислений является совершенствование методов и алгоритмов цифровой обработки сигналов и изображений [9]. Таким образом, актуальной является разработка различных подходов для снижения вычислительной сложности вейвлет-преобразований, включая использование различных специализированных аппаратных архитектур [10].

В настоящее время существуют некоторые подходы к разрешению проблемы недостаточной производительности алгоритмов вейвлет-обработки сигналов. В статье [11] представлен способ построения многомерных вейвлетов, обеспечивающий формирование неразделимых наборов вейвлет-фильтров на основе пары одномерных фильтров нижних частот. В предложенном подходе один из фильтров обладает интерполяционными

свойствами, что позволяет повысить эффективность обработки изображений за счёт увеличения скорости вычислений. Авторами работы [12] предложены оригинальные алгоритмы прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования сигналов в частотной области. Данные алгоритмы используют вейвлеты на основе производных функции Гаусса. Результаты моделирования в указанной работе продемонстрировали, что применение быстрого преобразования Фурье позволяет сократить время выполнения вейвлет-преобразования в 15000 раз по сравнению с методом прямого численного интегрирования для сигнала объёмом 32 768 отсчётов. Предложенные алгоритмы также применимы к вейвлетам с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой. В работе [13] предложены модификации алгоритмов цифровой обработки изображений на основе обобщённого метода Винограда. В монографии [14] описаны алгоритмы вейвлет-фильтрации для систем на кристалле, оптимизированные по использованию вычислительных ресурсов. Авторами [14] также представлены принципы вычислений вейвлет-коэффициентов с использованием базовых блоков, а также изложены способы реализации вейвлет-фильтров на основе дискретно-аналоговых вычислений. В работе [15] представлена архитектура усечённого умножителя с накопителем, а также преобразователей для выполнения вычислений по модулю  $(2^n+1)$ . Согласно результатам аппаратного моделирования, для 32-

разрядной реализации фильтра экономия аппаратных ресурсов достигает 32,5 %, однако при этом наблюдается увеличение задержки до 16,4 %. В статье [16] описаны алгоритмы цифровой фильтрации на основе метода Винограда, которые могут быть использованы в сверточных слоях нейронных сетей. Продемонстрировано преимущество в быстродействии разработки, по сравнению с быстрым преобразованием Фурье, при обработке больших массивов визуальной информации в задачах глубокого обучения. На основе подхода из работы [16] были разработаны архитектурные решения в исследовании [17] и проблемно-ориентированные аппаратные ускорители в работе [18], обеспечивающие реализацию алгоритмов машинного обучения и цифровой обработки изображений на основе метода Винограда.

Классическая формулировка метода Винограда ориентирована на вычисление групп соседних значений, в то время как при вейвлет-фильтрации используется операция децимации, заключающаяся в уменьшении частоты дискретизации. Данное обстоятельство требует адаптации и обобщения метода Винограда для задач с понижающей дискретизацией сигнала с коэффициентом 2, характерной для вейвлет-преобразований изображений.

Цель настоящего исследования заключается в снижении вычислительной задержки и повышении скорости обработки изображений при использовании вейвлет-фильтров на основе применения модифицированного метода Винограда

для высокоскоростной реализации одномерной фильтрации с децимацией.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 излагается предложенный метод реализации вейвлет-обработки изображений на основе метода Винограда. В разделе 3 представлена высокопроизводительная реализация дискретного вейвлет-преобразования с использованием указанных подходов. В заключении подводятся итоги работы.

## Материалы и методы

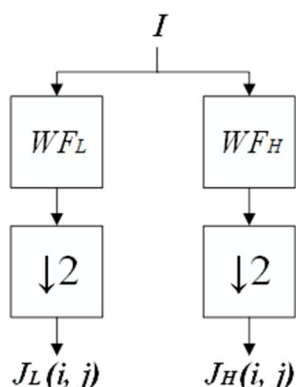
### А. Вейвлет-фильтрация прямым методом

Процесс обработки двумерного изображения при помощи вейвлет-фильтрации с децимацией по строкам в рамках прямого метода может быть описан следующей формулой:

$$I(i, j) = \sum_{k=1}^I J(i, 2j+1-k) WF(k), \quad (1)$$

где  $J$  – обрабатываемое двумерное изображение;  $I$  – результат вейвлет-обработки изображения;  $i$  – номер строки пикселей;  $j$  – номер столбца пикселей;  $WF$  – вейвлет-фильтр порядка  $k$ . Вейвлет-преобразование изображений прямым методом выполняется с использованием двух вычислительных каналов, соответствующих низкочастотному и высокочастотному вейвлетным фильтрам [19]. На рис. 1 изображена схема одномерной вейвлет-обработки прямым методом, где  $WF_L$  – низкочастотный вейвлет-фильтр;  $WF_H$  – высокочастотный фильтр;  $J_L(i, j)$  и  $J_H(i, j)$  – результаты обработки изображения, содержащие

низкочастотную и высокочастотную информацию об исходном изображении, соответственно.



**Рис. 1.** Схема вейвлет-обработки изображения прямым методом с децимацией

**Fig. 1.** Scheme of wavelet filtering of a fragment of the original image by the direct method with decimation

При вейвлет-обработке прямым методом каждый пиксель изображения преобразуется с использованием пары вейвлет-фильтров порядка  $q$ , что требует выполнения  $2q$  операций умножения и  $2(q-1)$  операций сложения. Поскольку операции умножения характеризуются большей вычислительной сложностью по сравнению со сложениями, их реализация в цифровых фильтрах на современных вычислительных устройствах сопровождается значительными затратами ресурсов. Одним из ключевых альтернативных подходов к классическому прямому методу является метод Винограда, рассмотренный далее.

#### В. Цифровая фильтрация на основе метода Винограда

Метод Винограда позволяет уменьшить вычислительную сложность при об-

работке изображений за счёт одновременного получения нескольких пикселей обработанного изображения за счет использования матричных преобразований. Общая формула метода Винограда для одномерной фильтрации изображений может быть описана следующей формулой [20]:

$$J = M^T \left( (B \times WF) \odot (N^T \times I) \right), \quad (2)$$

где  $J$  – фрагмент обработанного изображения размером  $d \times 1$ ;  $WF$  – маска вейвлет-фильтра размером  $q \times 1$ ;  $I$  – фрагмент исходного обрабатываемого изображения размером  $a \times 1$ , где  $a = d + q - 1$ ;  $M^T$ ,  $B$ ,  $N^T$  – матрицы преобразования размерами  $d \times a$ ,  $a \times q$ ,  $a \times a$ , соответственно;  $\odot$  – оператор поэлементного умножения матриц. Обозначение метода Винограда  $K(a, q)$  указывает на размер  $a$  обрабатываемых фрагментов изображения и порядок  $q$  используемого вейвлета, от которых зависят размеры матриц преобразования и исходных фрагментов изображения. Так, метод Винограда со значением  $K(4, 2)$  использует матрицы, построенные на точках  $0, \pm 1, 2, \infty$ :

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Классическая форма метода Винограда предполагает обработку групп смежных пикселей. В то же время, вейвлет-фильтрация изображения осуществляется по двум вычислительным каналам с децимацией, что направлено на снижение частоты дискретизации и устранение избыточных вычислений. Это требует адаптации метода Винограда к более широкому классу задач, в том числе и для случаев, когда обрабатываемый фрагмент изображения может включать не только соседние, но и идущие не подряд пиксели.

### С. Фильтрация методом Винограда с децимацией

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_a, \dots, x_{a+q-1}$  являются значениями яркости пикселей некото-

рого фрагмента строки исходного изображения  $I$ , а  $q_1, q_2, \dots, q_q$  – коэффициенты вейвлет-фильтра  $WF$ . Тогда, вычисление значений  $d_1, d_2, \dots, d_a$  фрагмента строки обработанного изображения  $J$  может быть описано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_a & x_{a+1} & \dots & x_{a+q-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_q \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим фильтрацию методом Винограда на примере обработки фрагмента с 10 пикселями ( $a+q-1=10$ ) при помощи фильтра 5-го порядка ( $q=5$ ) с получением на выходе 6 значений ( $a=6$ ) фрагмента обработанного изображения  $J$ :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

При вейвлет-фильтрации с децимацией вычисляются значения  $d_1, d_3, d_5$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 + x_4 q_4 + x_5 q_5 \\ x_3 q_1 + x_4 q_2 + x_5 q_3 + x_6 q_4 + x_7 q_5 \\ x_5 q_1 + x_6 q_2 + x_7 q_3 + x_8 q_4 + x_9 q_5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 q_1 + x_3 q_3 + x_5 q_5 \\ x_3 q_1 + x_5 q_3 + x_7 q_5 \\ x_5 q_1 + x_7 q_3 + x_9 q_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 q_2 + x_4 q_4 \\ x_4 q_2 + x_6 q_4 \\ x_6 q_2 + x_8 q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_7 \\ x_5 & x_7 & x_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & x_4 \\ x_4 & x_6 \\ x_6 & x_8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_2 \\ q_4 \end{pmatrix}. \quad (6) \end{aligned}$$

Полученные вычисления можно реализовать комбинацией метода Винограда  $K(3,3)$  с применением значений яркости пикселей  $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9$  и коэффициентов фильтра  $q_1, q_3, q_5$ , и  $K(3,2)$  с применением значений яркости пиксе-

лей  $x_2, x_4, x_6, x_8$  и коэффициентов фильтра  $q_2, q_4$ . В данном случае, вместо метода  $K(6,5)$ , при вейвлет-фильтрации с децимацией можно использовать метод  $K(3,5,2)=K(3,3)+K(3,2)$ , где третье число в  $K(3,5,2)$  означает степень

уменьшения частоты дискретизации. В общем случае, фильтрация при помощи метода Винограда  $K(a, q, s)$  с уменьшением частоты дискретизации сигнала в  $s$  раз производится следующим образом:

$$K(a, q, s) = b_2 \times K(a, b_1 + 1) + (s - b_2) \times K(a, b_1), \quad (7)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – неполное частное и остаток от деления  $q$  на  $s$ , соответственно. Обозначение метода Винограда  $K(a, q, s)$  содержит размер  $a$  обрабатываемых пикселей изображения, порядок  $q$  исполь-

зуемого вейвлетного фильтра и  $s$  шаг децимации.

Рассмотрим цифровую фильтрацию на основе метода Винограда с децимацией на примере обработки фрагмента, содержащего 14 ( $a + q - 1 = 14$ ) пикселей фильтром 6-го порядка ( $q = 6$ ), с получением на выходе 9 значений ( $a = 9$ ) фрагмента обработанного изображения  $J$ . При  $s = 3$  вычисляются значения  $d_1, d_4, d_7$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 + x_4 q_4 + x_5 q_5 + x_6 q_6 \\ x_4 q_1 + x_5 q_2 + x_6 q_3 + x_7 q_4 + x_8 q_5 + x_9 q_6 \\ x_7 q_1 + x_8 q_2 + x_9 q_3 + x_{10} q_4 + x_{11} q_5 + x_{12} q_6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 q_1 + x_4 q_4 \\ x_4 q_1 + x_7 q_4 \\ x_7 q_1 + x_{10} q_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 q_2 + x_5 q_5 \\ x_5 q_2 + x_8 q_5 \\ x_8 q_2 + x_{11} q_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 q_3 + x_6 q_6 \\ x_6 q_3 + x_9 q_6 \\ x_9 q_3 + x_{12} q_6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_7 \\ x_7 & x_{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & x_5 \\ x_5 & x_8 \\ x_8 & x_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_2 \\ q_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & x_6 \\ x_6 & x_9 \\ x_9 & x_{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_3 \\ q_6 \end{pmatrix}. \quad (8) \end{aligned}$$

Полученные вычисления можно реализовать методом Винограда  $K(3, 2)$  с использованием значений яркости пикселей  $x_1, x_4, x_7, x_{10}$  и коэффициентов фильтра  $q_1, q_4$ ; для значений  $x_2, x_5, x_8, x_{11}$  и коэффициентов  $q_2, q_5$ ; для значений  $x_3, x_6, x_9, x_{12}$  и коэффициентов  $q_3, q_6$ . В данном случае вместо метода винограда  $K(9, 6)$  при фильтрации с шагом 3 можно использовать метод  $K(3, 6, 3) = 3K(3, 2)$ . В частном случае, когда  $s$  делит  $q$ , формула (7) принимает следующий вид:

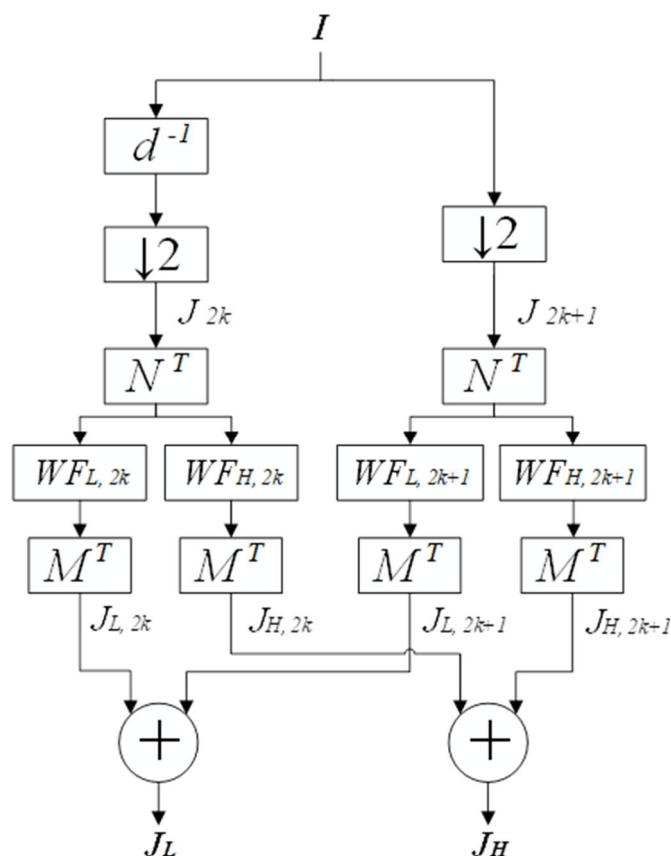
$$K(a, q, s) = s \times K(a, b_1). \quad (9)$$

В процессе вейвлет-обработки изображения с использованием метода Винограда  $K(a, q, s)$  входные данные раз-

деляются на четные и нечетные группы отсчетов. При этом вычисления разбиваются на вычислительные каналы, соответствующие четным и нечетным отсчетам пикселей. Умножения матриц  $B \times WF_L$  и  $B \times WF_H$  для реализации метода Винограда выполняются однократно для каждого фильтра, и не требуют дополнительных вычислительных затрат при предварительной подготовке констант. Произведение  $N^T \times I$  вычисляется до передачи обработки на два параллельных канала, поэтому оно выполняется одинаково для каждого вейвлетного фильтра. Указанное свойство позволяет сократить общее количество опе-

раций при дискретном вейвлет-преобразовании изображения, за счёт однократного вычисления величины  $N^T \times I$ , с последующей передачей результата по двум вычислительным каналам системы. Элементы матриц преобразований  $M^T$  и  $N^T$  известны заранее и состоят из нулей, степеней двоек, а также чисел, представленных в двоичном виде как комбинации единиц. Благодаря этому, умножения на элементы матриц  $M^T$  и  $N^T$  можно заменить на операции сдвига и сложения. Например, умножение на 9 (в двоичной форме  $1001_2$ ) можно реализовать смещением запятой этого числа

на три бита вправо, с последующим прибавлением к исходному числу. Таким образом, все вычисления по формуле (2) могут быть сведены к выполнению операций сложения, за исключением поэлементного умножения  $\odot$ , которое выполняется один раз для двух матриц размера  $a \times 1$ . На рис. 2 представлена предложенная схема вейвлет-обработки с децимацией по методу Винограда, где  $J_L$  и  $J_H$  обозначают фрагменты изображения, обработанные с применением вейвлет-фильтров  $WF_L$  и  $WF_H$ , соответственно.



**Рис. 2.** Схема вейвлет-фильтрации фрагмента исходного изображения на основе метода Винограда с децимацией

**Fig. 2.** Scheme of wavelet filtering of a fragment of the original image based on the Winograd method with decimation



#### D. Эффективное представление данных по вычислительной сложности

Поскольку в цифровых устройствах данные представлены с ограниченной точностью, требуется квантование коэффициентов вейвлет-фильтров. В рамках экспериментов используются вейвлеты Добеши *db2* и *db3*. При обработке 8-битных изображений коэффициенты фильтров задаются с точностью, определяемой согласно формуле [17]

$$f = 10 + \left\lfloor \sqrt{\frac{q}{4}} \right\rfloor, \quad (10)$$

где  $f$  – разрядность квантованных коэффициентов вейвлет-фильтров без учета знакового бита. Коэффициенты исходного фильтра  $K$  масштабируются на  $f$  бит и округляются к большему:

$$K^* = \lceil K \times 2^f \rceil, \quad (11)$$

где  $K^*$  – квантованный фильтр.

Возьмем в качестве примера исходных коэффициентов высокочастотного вейвлет-фильтра *db2* следующие значения:

$$HD = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Согласно формуле (10) для рассматриваемого вейвлет-фильтра  $f=11$ . Квантование коэффициентов вейвлет-фильтра по формуле (11) можно представить в виде:

$$HD = (-699 \quad 1212 \quad -324 \quad -187). \quad (13)$$

После применения вейвлет-фильтрации с использованием метода Винограда полученные значения проходят обратное

масштабирование и округляются в меньшую сторону для компенсации погрешностей, вызванных округлением. Таким образом, ограниченная точность представления данных в памяти устройства не оказывает значительного влияния на качество вейвлет-обработки изображений.

В следующем разделе представлены результаты реализации обоих рассмотренных подходов к вейвлет-обработке на программируемой вентильной матрице, а также проведён анализ полученных данных.

#### Результаты и их обсуждение

Аппаратное моделирование и сравнение методов организации матричных вычислений при вейвлет-обработке двумерного 8-битного изображения с использованием прямого метода и метода Винограда с прореживанием в 2 раза выполнено на программируемой вентильной матрице (ППВМ) в среде Xilinx Vivado 2018.2. Реализация выполнена на языке Verilog для ППВМ из семейства Virtex 7 (модель xc7vx485tffg1157-1), с использованием стандартных параметров синтеза (Vivado Synthesis Defaults) и реализации (Vivado Implementation Defaults), соответственно. Использование указанных настроек параметров синтеза и реализации ППВМ «по умолчанию» обеспечивает воспроизводимость результатов эксперимента. Для реализации операций сложения и умножения применялись деревья Уоллеса с последующим сложением при помощи сумматоров с сохранением переноса (CSA) и сумматоров Когге-Стоуна (KSA). Проектирова-

ние указанных деревьев CSA и KSA осуществлялось стандартными алгоритмами, описанными в [21]. Использование данных типов сумматоров позволяет минимизировать временные затраты на вычисления. Входными данными служили 8-битные пиксели исходного изображения. Для моделирования были выбраны вейвлеты Добеши 4-го и 6-го порядков, коэффициенты фильтров которых были квантованы до 11 бит, в соответствии с формулами (10)-(11). Результатом обработки являлись 8-битные пиксели выходного изображения. Поскольку метод Винограда генерирует несколько выходных пикселей за одну итерацию, для корректного сравнения все методы оценивались по средним затратам ресурсов на обработку одного

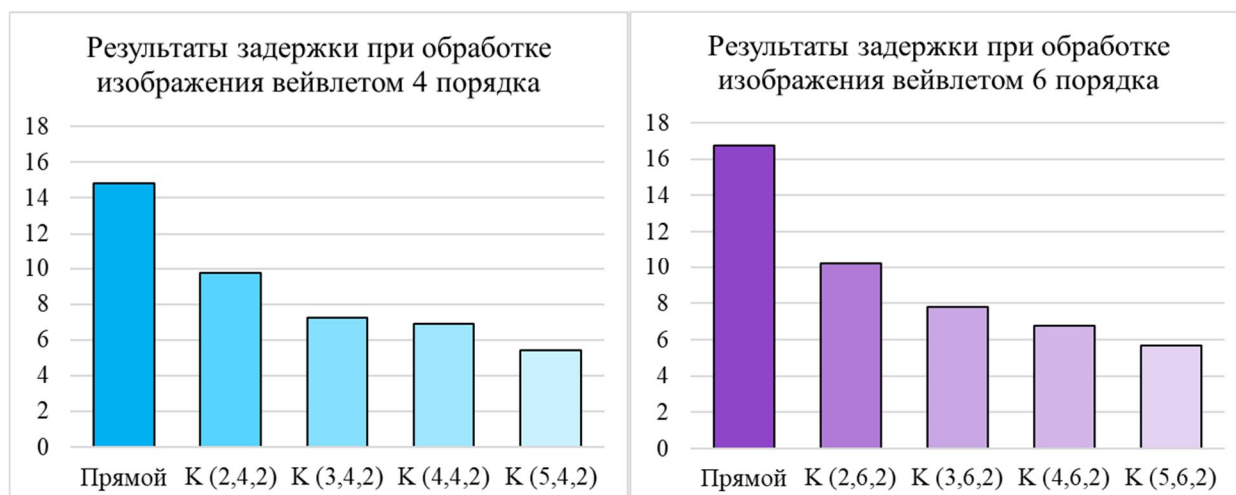
пикселя. Численные результаты моделирования приведены в табл. 1, а графики на рис. 3-4 демонстрируют временные затраты, а также произведение «площадь-задержка».

Результаты экспериментального моделирования продемонстрировали, что время вычислений при вейвлет-преобразовании изображений на основе метода Винограда (по сравнению с прямым методом) уменьшается на 34-63%, при использовании вейвлет-фильтров 4 порядка, и на 39-66%, при использовании вейвлет-фильтров 6 порядка. При этом, наилучшая эффективность произведения «площадь-задержка» достигается при использовании метода Винограда  $K(3,4,2)$  для вейвлет-фильтра 4 порядка и  $K(5,6,2)$  для вейвлетного фильтра 6 порядка.

**Таблица 1.** Численные результаты моделирования устройства вейвлет-обработки изображений с использованием различных методов организации вычислений, с усредненными значениями по каждому пикселю

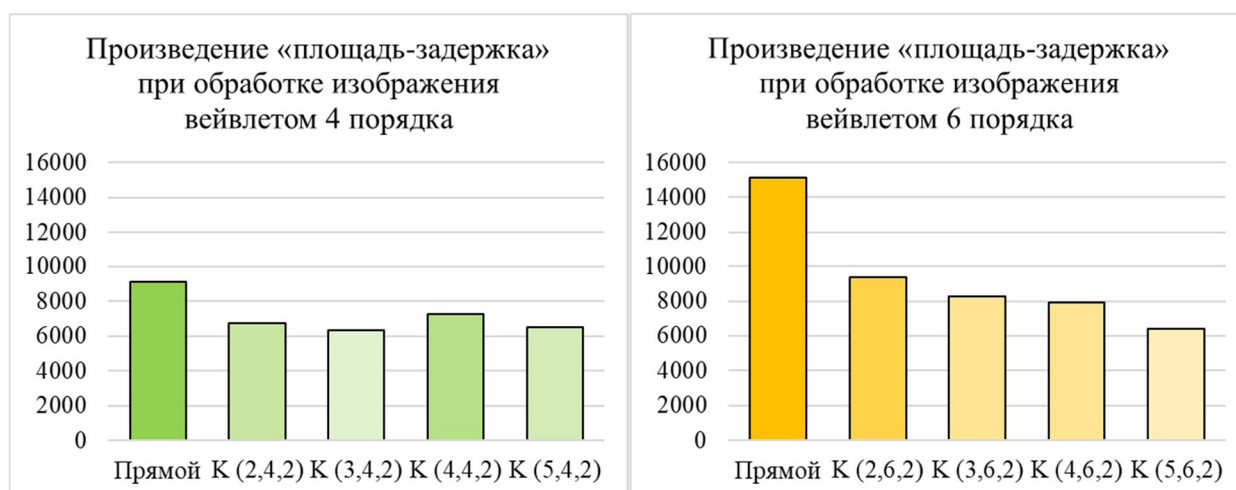
**Table 1.** Numerical results of modeling a wavelet image processing device using various methods of organizing calculations, with averaged values for each pixel

Порядок вейвлет-фильтра / The order of the wavelet filter	Метод вычислений / Calculation method	Количество пикселей фрагмента обработанного изображения / Number of pixels of the processed image fragment	Задержка устройства, нс / Device delay, ns	Произведение площади и задержки устройства / Product of area and device delay
4	Прямой	1	14,815	9140,86
	$K(2,4,2)$	2	9,732	6739,07
	$K(3,4,2)$	3	7,263	6311,55
	$K(4,4,2)$	4	6,908	7275,85
	$K(5,4,2)$	5	5,415	6525,92
6	Прямой	1	16,730	15107,19
	$K(2,6,2)$	2	10,222	9368,01
	$K(3,6,2)$	3	7,786	8268,73
	$K(4,6,2)$	4	6,747	7931,10
	$K(5,6,2)$	5	5,706	6419,03



**Рис. 3.** График задержки (нс) при дискретном вейвлет-преобразовании изображения с использованием прямого метода (1 пиксель) и метода Винограда (2-5 пикселей), с усредненными значениями по каждому пикселю

**Fig. 3.** Delay (ns) graph for discrete wavelet transform of an image using direct method (1 pixel) and Winograd method (2-5 pixels), with averaged values for each pixel



**Рис. 4.** График произведения площади и задержки устройства при дискретном вейвлет-преобразовании изображения с использованием прямого метода (1 пиксель) и метода Винограда (2-5 пикселей), с усредненными значениями по каждому пикселю

**Fig. 4.** Plot of area-device product delay for discrete wavelet transform of an image using direct method (1 pixel) and Winograd method (2-5 pixels), with averaged values for each pixel

Разработанный подход может быть применен к любым наборам фильтров, реализующих дискретное вейвлет-преобразование, например, из работы [11]. Перспективным направлением дальнейших исследований является применение раз-

работанного подхода в нейросетевых архитектурах, например, путем перехода от двумерных сверток из работы [15] к композиции одномерных преобразований, например, с использованием тензорных разложений. Аналогичным об-

разом могут быть преобразованы двумерные цифровые фильтры для обработки изображений, рассмотренные в работе [12]. Другими перспективными направлениями дальнейших исследований в предметной области статьи могут быть определение оптимальной разрядности коэффициентов фильтров для ППВМ-реализации, по аналогии с работой [18], а также разработка параллельных вычислительных структур, реализующих вейвлет-фильтрацию в системе остаточных классов [14].

Представленный в статье подход сохраняет все преимущества пространственно-временной вейвлет-обработки сигналов по сравнению только с частотной обработкой при использовании преобразования Фурье или его модификаций. Метод Винограда позволяет значительно ускорить вейвлет-обработку изображений, ценой умеренного возрастания аппаратных и энергетических затрат. Было установлено, что дальнейшее увеличение размера обрабатываемых фрагментов изображения при использовании метода Винограда приводит к незначительному приросту скорости вейвлет-обработки, сопровождаемому существенным ростом аппаратных и энергетических затрат. Кроме того, дальнейшее увеличение размера может существенно повысить вычислительную погрешность и снизить качество обработки изображения.

Установленный факт может стать основой для разработки новых систем цифровой обработки сигналов и изображений на основе дискретного вейв-

лет-преобразования. В настоящее время такие системы весьма востребованы для решения широкого класса задач в области машинного обучения, медицинской визуализации, беспилотного транспорта, обработки спутниковых снимков. Кроме того, полученный результат может помочь в создании систем обработки изображений и видео в реальном времени.

## Выводы

В статье предложен новый подход к вейвлет-фильтрации изображений с децимацией на основе метода Винограда, который адаптирован для обработки сигналов с понижающей дискретизацией и произвольным шагом. Аппаратное моделирование вейвлет-фильтрации на FPGA показало, что предложенное решение позволяет снизить вычислительную задержку до 63% для вейвлет-фильтров 4 порядка и до 66% для вейвлет-фильтров 6 порядка. Наилучшее соотношение между площадью и задержкой устройства продемонстрировали конфигурации метода Винограда  $K(3,4,2)$  при использовании вейвлет-фильтров 4 порядка и  $K(5,6,2)$  при использовании вейвлет-фильтров 6-го порядка.

Полученный результат будет востребован для практического применения в области цифровой обработки сигналов, изображений и видео. Доказанная высокая скорость вейвлет-обработки на основе предложенного метода позволит обрабатывать большие массивы информации за меньшее время, что

особенно важно в современных системах искусственного интеллекта.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на реализацию данного подхода на интегральных схемах специаль-

ного назначения (ASIC), а также на применение модулярных вычислений для более эффективного параллелизма и увеличения скорости работы устройств.

### Список литературы

1. Wu Y., Gao G., Cui C. Improved wavelet denoising by non-convex sparse regularization under double wavelet domains // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 30659-30671. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2903125.
2. Qin Q., Dou J., Tu Z. Deep ResNet Based Remote Sensing Image Super-Resolution Reconstruction in Discrete Wavelet Domain // Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. 2020. Vol. 30, №. 3. P. 541-550. DOI: 10.1134/S1054661820030232.
3. Souillard R., Carre P. Elliptical monogenic wavelets for the analysis and processing of color images // IEEE transactions on signal processing. 2015. Vol. 64, №. 6. C. 1535-1549. DOI: 10.1109/TSP.2015.2505664
4. Chen Y., Li D., Zhang J. Q. Complementary color wavelet: A novel tool for the color image/video analysis and processing // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. 2017. Vol. 29, №. 1. P. 12-27. DOI: 10.1109/TCSVT.2017.2776239.
5. Тараненко Ю. К. Методы дискретной вейвлет-фильтрации измерительных сигналов: алгоритм выбора метода // Измерительная техника. 2021. № 10. С. 14-20. DOI: 10.32446/0368-1025it.2021-10-14-20.
6. Алимагадов К. А., Умняшкин С. В. Аугментация данных на основе вейвлет-фильтрации при обучении нейронных сетей // ГрафиКон-2023: труды Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению. М., 2023. С. 437-442.
7. Симонов Е. Н., Виноградов К. М. Реконструкция изображения по методу обратного проецирования с использованием вейвлет-фильтрации проекционных данных в рентгеновской компьютерной томографии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. Т. 13, № 2. С. 5-22. DOI: 10.14529/cmse240201.
8. Rossinelli D., Fourestey G., Schmidt F. High-Throughput Lossy-to-Lossless 3D Image Compression // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2021. Vol. 40, no. 2. P. 607-620. DOI: 10.1109/TMI.2020.3033456.
9. Alcaín E., Fernández P. R., Nieto R. Hardware Architectures for Real-Time Medical Imaging // Electronics. 2021. Vol. 10, no. 24. P. 3118. DOI: 10.3390/electronics10243118.

10. Escande P., Weiss P. Fast wavelet decomposition of linear operators through product-convolution expansions // IMA Journal of Numerical Analysis. 2022. Vol. 42, no. 1. P. 569-596. DOI: 10.1093/imanum/draa072.

11. Семенов В. И., Чумаров С. Г. От конструирования вейвлетов на основе производных функции Гаусса к синтезу фильтров с конечной импульсной характеристикой // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, № 2. С. 306-313. DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313.

12. Разработка алгоритмов цифровой обработки изображений на основе метода Винограда в общем виде и анализ их вычислительной сложности / П. А. Ляхов, Н. Н. Нагорнов, Н. Ф. Семенова, А. Ш. Абдулсалямова // Компьютерная оптика. 2023. Т. 47, № 1. С. 68-78. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1146.

13. Иванов В. Э., Чье Е. У. Модульные дискретно-аналоговые вейвлет-фильтры. М.: Общество с ограниченной ответственностью "Издательство "КноРус", 2021. 168 с.

14. Бергерман М. В. Использование системы остаточных классов с модулями вида  $\{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1\}$  для снижения аппаратных затрат цифрового фильтра // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2023. № 1(65). С. 32-43. DOI: 10.21685/2072-3059-2023-1-3.

15. Lavin A., Gray S. Fast algorithms for convolutional neural networks // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2016. P. 4013-4021.

16. Mehrabian A., Miscuglio M., Alkabani Y., Sorger V. J., El-Ghazawi T. A winograd-based integrated photonics accelerator for convolutional neural networks // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. 2019. Vol. 26, №. 1. P. 1-12. DOI: 10.1109/JSTQE.2019.2957443.

17. Shen J., Huang Y., Wen M., Zhang C. Toward an efficient deep pipelined template-based architecture for accelerating the entire 2-D and 3-D CNNs on FPGA // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2019. Vol. 39, №. 7. P. 1442-1455. DOI: 10.1109/TCAD.2019.2912894.

18. Нагорнов Н. Н. Определение минимальной разрядности коэффициентов вейвлет-фильтров для трехмерной медицинской визуализации // Информационные технологии. 2021. Т. 27, № 8. С. 425-434. DOI 10.17587/it.27.425-434.

19. Winograd S. Arithmetic complexity of computations. Siam, 1980. Vol. 33.

20. Chervyakov N., Lyakhov P., Kaplun D., Butusov D., Nagornov N. Analysis of the quantization noise in discrete wavelet transform filters for image processing // Electronics. 2018. Vol. 7, №. 8. P. 135. DOI: 10.3390/electronics7080135.

21. Parhami B. Computer arithmetic. New York, NY: Oxford university press, 2010. Vol. 20.

## References

1. Wu Y., Gao G., Cui C. Improved wavelet denoising by non-convex sparse regularization under double wavelet domains. *IEEE Access*. 2019; (7): 30659-30671. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2903125.
2. Qin Q., Dou J., Tu Z. Deep ResNet Based Remote Sensing Image Super-Resolution Reconstruction in Discrete Wavelet Domain. *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications*. 2020; 30(3): 541-550. DOI: 10.1134/S1054661820030232.
3. Souillard R., Carre P. Elliptical monogenic wavelets for the analysis and processing of color images. *IEEE transactions on signal processing*. 2015; 64(6): 1535-1549. DOI: 10.1109/TSP.2015.2505664
4. Chen Y., Li D., Zhang J. Q. Complementary color wavelet: A novel tool for the color image/video analysis and processing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2017; 29(1): 12-27. DOI: 10.1109/TCSVT.2017.2776239.
5. Taranenko Yu. K. Methods of discrete wavelet filtering of measuring signals: algorithm for choosing a method. *Izmeritel'naya tekhnika = Measuring equipment*. 2021; (10): 14-20. (In Russ.). DOI: 10.32446/0368-1025it.2021-10-14-20.
6. Alimagadov K. A., Umnyashkin S. V. Data augmentation based on wavelet filtering in training neural networks. In: *GrafiKon-2023. Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii po komp'yuternoi grafike i zreniyu = GraphiCon-2023. Proceedings of the International Conference on Computer Graphics and Vision*. Moscow; 2023. P. 437-442. (In Russ.).
7. Simonov E. N., Vinogradov K. M. Image reconstruction by the back projection method using wavelet filtering of projection data in X-ray computed tomography. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika = Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Informatics*. 2024; 13(2): 5-22. (In Russ.). DOI: 10.14529/cmse240201.
8. Rossinelli D., Fourestey G., Schmidt F. High-Throughput Lossy-to-Lossless 3D Image Compression. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2021; 40(2): 607-620. DOI: 10.1109/TMI.2020.3033456.
9. Alcaín E., Fernández P. R., Nieto R. Hardware Architectures for Real-Time Medical Imaging. *Electronics*. 2021; 10(24): 3118-3126. DOI: 10.3390/electronics10243118.
10. Escande P., Weiss P. Fast wavelet decomposition of linear operators through product-convolution expansions. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2022; 42(1): 569-596. DOI: 10.1093/imanum/draa072.
11. Semenov V. I., Chumarov S. G. From wavelet construction based on Gaussian derivatives to finite impulse response filter synthesis. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki = Scientific and Technical Bulletin of Infor-*

*mation Technologies, Mechanics and Optics*. 2024; 24(2): 306-313. (In Russ.). DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-306-313.

12. Lyakhov P. A., Nagornov N. N., Semenova N. F., Abdulsalyamova A. Sh. Development of algorithms for digital image processing based on the Vinograd method in general and analysis of their computational complexity. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*. 2023; 47(1): 68-78. (In Russ.). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1146.

13. Ivanov V. E., Chye E. U. Modular discrete-analog wavelet filters. Moscow: KnoRus; 2021. 168 p. (In Russ.).

14. Bergerman M. V. Using a residual class system with modules of the form  $\{2n - 1, 2n, 2n + 1\}$  to reduce the hardware costs of a digital filter. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Tekhnicheskie nauki = News of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2023; (1): 32-43. (In Russ.). DOI: 10.21685/2072-3059-2023-1-3.

15. Lavin A., Gray S. Fast algorithms for convolutional neural networks. *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2016: 4013-4021.

16. Mehrabian A., Miscuglio M., Alkabani Y., Sorger V. J., El-Ghazawi T. A winograd-based integrated photonics accelerator for convolutional neural networks. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2019; 26(1): 1-12. DOI: 10.1109/JSTQE.2019.2957443.

17. Shen J., Huang Y., Wen M., Zhang C. Toward an efficient deep pipelined template-based architecture for accelerating the entire 2-D and 3-D CNNs on FPGA. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 2019; 39(7): 1442-1455. DOI: 10.1109/TCAD.2019.2912894.

18. Nagornov N. N. Determination of the minimum bit depth of wavelet filter coefficients for three-dimensional medical imaging. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*. 2021; 27(8): 425-434. (In Russ.). DOI 10.17587/it.27.425-434.

19. Winograd S. Arithmetic complexity of computations. Siam, 1980; 33.

20. Chervyakov N., Lyakhov P., Kaplun D., Butusov D., Nagornov N. Analysis of the quantization noise in discrete wavelet transform filters for image processing. *Electronics*. 2018; 7(8): 135. DOI: 10.3390/electronics7080135.

21. Parhami B. Computer arithmetic. New York, NY: Oxford university press; 2010; 20.

### Информация об авторе / Information about the Author

**Ляхов Павел Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования, Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь, Российская Федерация, e-mail: ljahov@mail.ru, ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0487-4779>

**Pavel A. Lyakhov**, Cand of Sci. (Physico-Mathematical), Head of the Mathematical Modeling Department, North Caucasus Federal University, Stavropol, Russian Federation, e-mail: ljahov@mail.ru, ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0487-4779>