

УДК 681.51

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-55-70>

Математическое моделирование системы автоматического регулирования численным интегрированием

В. А. Хандожко ¹ ✉, О. Н. Федонин ¹, В. П. Матлахов ¹, А. В. Хандожко ¹

¹ Брянский государственный технический университет
б-р 50 лет Октября, д.7, г. Брянск 241035, Российская Федерация

✉ e-mail: vichandozhko@gmail.com

Резюме

Цель исследования. Целью работы является исследование математической модели системы автоматического регулирования (САР), состоящей из регулятора и объекта управления для исполнения на микропроцессорной системе с поддержкой операционной системы реального времени. В качестве изменяемых параметров приняты структура САР, коэффициенты передачи передаточных функций звеньев, постоянные времени и транспортные задержки. Выходные данные представлены в виде переходных процессов. Задачей является сравнение аналитического и численных методов для программной реализации математической модели САР с применением программируемого логического контроллера (ПЛК) в составе испытательного стенда с микропроцессорным электроприводом. Задачей является сравнение аналитического и численных методов для программной реализации математической модели САР с применением программируемого логического контроллера (ПЛК) в составе испытательного стенда с микропроцессорным электроприводом.

Методы. Использованы метод системного анализа, теория автоматического управления, численные методы дифференцирования и интегрирования, дифференциальные и разностные уравнения.

Результаты. Практические рекомендации для выбора ПЛК при решении задач моделирования объектов и систем управления исходя из инерционности входящих в контур регулирования звеньев. В качестве критерия оценки используется относительная погрешность (интегральная, для САР в целом) и выполнение требования устойчивости цифровой модели.

Заключение. Исследования показали, что для канонических САР с объектами 1-го и 2-го порядка и транспортной задержкой с определенными критериями, такими как устойчивость цифровой модели и относительная погрешность (интегральная), существует связь между инерционностью моделируемых звеньев САР и производительностью ПЛК. Для практического подтверждения полученных результатов требуются дополнительные исследования.

Ключевые слова: математическая модель; система автоматического регулирования; ПИД-регулятор; ПЛК; САР.

© Хандожко В. А., Федонин О. Н., Матлахов В. П., Хандожко А. В., 2025

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Математическое моделирование системы автоматического регулирования численным интегрированием / В. А. Хандожко, О. Н. Федонин, В. П. Матлахов, А. В. Хандожко // Известия Юго-Западного государственного университета. 2025; 29(2): 55-70. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-55-70>.

Поступила в редакцию 23.04.2025

Подписана в печать 17.06.2025

Опубликована 23.07.2025

Mathematical modeling of automatic control system by numerical integration

Viktor A. Khandozhko ¹ ✉, Oleg N. Fedonin ¹, Vitaly P. Matlakhov ¹,
Alexander V. Khandozhko ¹

¹ Bryansk State Technical University
50 Let Oktyabrya Ave., 7, Bryansk 241035, Russian Federation

✉ e-mail: vichandozhko@gmail.com

Abstract

Purpose of research. The aim of the work is to study the mathematical model of the automatic control system (ACS), consisting of a regulator and a control object for execution on a microprocessor system with support for a real-time operating system. The structure of the ACS, the coefficients of transfer of the transfer functions of the links, time constants and transport delays are adopted as variable parameters. The output data are presented in the form of transient processes. The task is to compare the analytical and numerical methods for software implementation of the mathematical model of the ACS using a programmable logical controller (PLC) as part of a test bench with a microprocessor electric drive. The objective is to compare analytical and numerical methods for software implementation of a mathematical model of automatic control system using a programmable logic controller (PLC) as part of a test bench with a microprocessor electric drive.

Methods. The methods of system analysis, automatic control theory, numerical methods of differentiation and integration, differential and difference equations were used.

Results. Practical recommendations for choosing a PLC when solving problems of modeling objects and control systems based on the inertia of the links included in the control loop. The relative error (integral, for the ACS as a whole) and the fulfillment of the requirement for the stability of the digital model are used as an evaluation criterion.

Conclusion. The studies have shown that for canonical ACS with 1st and 2nd order objects and transport delay with certain criteria, such as digital model stability and relative error (integral), there is a connection between the speed of the simulated ACS links and the PLC performance. Additional studies are required for practical confirmation of the obtained results.

Keywords: mathematical model; automatic control system; PID controller; PLC; ACS.

Conflict of interest. The Authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Khandozhko V. A., Fedonin O. N., Matlakhov V. P., Khandozhko A. V. Mathematical modeling of automatic control system by numerical integration. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2025; 29(2): 55-70 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2025-29-2-55-70>.

Received 23.04.2025

Accepted 17.06.2025

Published 23.07.2025

Введение

Для описания работы САР в динамике используют неоднородные дифференциальные уравнения вида:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f'(t) + b_0f(t) + g_k u^{(k)}(t) + g_{k-1}u^{(k-1)}(t) + \dots + g_1u'(t) + g_0u(t), \quad (1)$$

где $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$ – неизвестная функция времени и ее производные;

$f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(m)}(t)$ – функция внешнего возмущения от времени и ее производные;

$u(t)$, $u'(t)$, ..., $u^{(k)}(t)$ – функция задающего воздействия от времени и ее производные;

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, g_0, g_1, \dots, g_{k-1}$ – коэффициенты.

Для линейных систем управления эти уравнения имеют постоянные коэффициенты [1].

Для исследования поведения САР широко используют операторный метод представления (преобразование Лапласа):

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \\ L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (2)$$

Здесь s – комплексная переменная: $s = c + j\omega$.

Уравнение (1), записанное относительно изображения по Лапласу, имеет вид

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)X(s), \quad (3)$$

иначе

$$Y(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} X(s) = W(s)X(s). \quad (4)$$

$$W(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (5)$$

Передаточная функция $W(s)$ широко используется при анализе структурных схем. Функциональная схема САР приведена на рис.1 [2].

В микропроцессорных регуляторах используется дискретная форма представления передаточной функции. Математическое обеспечение для расчета $y(t)$ можно реализовать как с применением численного решения дифференциального уравнения (1), так и с помощью разностных уравнений [3, 4].

К методам численного решения дифференциальных уравнений относятся метод Эйлера, Рунге-Кутты и Адамса [5]. Современные проблемно-ориентированные программные продукты имеют универсальные решатели на базе этих методов. Для решения в реальном масштабе времени необходим наиболее быстрый метод. Сравнивая известные методы по точности и трудоемкости вычислений, предпочтение следует отдать методу Эйлера (явная схема). Согласно этому методу расчетная формула имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

Как известно, устойчивость явного метода Эйлера ниже, чем у неявного.

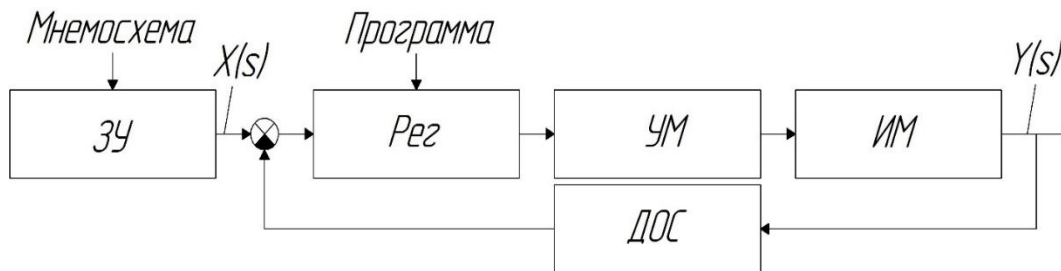


Рис.1. Функциональная схема САР: **ЗУ** – задающее устройство для управления уставками параметров технологического процесса (APM оператора со SCADA/панель оператора); **X(s)** – уставка; **Per** – регулятор (микропроцессорный/ ПЛК); **УМ** – усилитель мощности (магнитный пускатель/ сервопривод); **ИМ** – исполнительный механизм (шпиндель/ заслонка); **ДОС** – датчик обратной связи (давление/ температура); **Y(s)** – технологический параметр

Fig.1. Functional diagram of the SAR: **ЗУ** – setting device for controlling process parameter settings (operator workstation with SCADA/operator panel); **X(s)** – setting; **Per** – regulator (microprocessor/PLC); **УМ** – power amplifier (magnetic starter/servo drive); **ИМ** – actuator (spindle/damper); **ДОС** – feedback sensor (pressure/temperature); **Y(s)** – process parameter

При использовании неявного метода решение становится нелинейным, что приводит к увеличению трудоемкости вычислений. Устойчивость явного метода Эйлера обеспечивается рациональным подбором шага интегрирования h .

Второй подход формализации решения уравнений (1) основан на переходе от преобразования Лапласа к z -преобразованию:

$$z = e^{sT} = 1 + \frac{sT}{1!} + \frac{s^2 T^2}{2!} + \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

В зависимости от схемы известны три формы дискретизации: метод левых прямоугольников, метод прямоугольников и метод трапеций. Соответствующие им замены в передаточных функциях имеют вид:

а) метод левых прямоугольников

$$s = \frac{z-1}{T}, \quad (8)$$

б) метод прямоугольников

$$s = \frac{z-1}{zT}, \quad (9)$$

в) метод трапеций

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1}. \quad (10)$$

Материалы и методы

Модель САР

В реальных физических системах широко используются численные методы идентификации объектов управления, при этом распространенными являются модель первого и второго порядков [6].

Модель первого порядка (тепломассопереноса) имеет задержку τ и описывается уравнением вида

$$y(t) = \begin{cases} K_{oy} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right) \right] & \text{при } t \geq \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau. \end{cases} \quad (11)$$

В операторной форме модель имеет вид [7]

$$W(s) = \frac{K_{oy}}{Ts+1} e^{-s\tau}. \quad (12)$$

При идентификации параметров модели определяют коэффициент передачи объекта управления K_{oy} , постоянную времени T и транспортную задержку τ .

Если модель первого порядка неадекватно описывает объект управления и в нем явно просматривается еще одна не-

зависимая инерционность, то используют модель второго порядка. Она описывается уравнением вида [8]:

$$y(t) = \begin{cases} K_{oy} \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right) - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right) \right] & \text{при } t \geq \tau, T_1 \neq T_2 \\ K_{oy} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_1}\right) \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right) \right] & \text{при } t \geq \tau, T_1 = T_2 \\ 0 & \text{при } t < \tau. \end{cases} \quad (13)$$

В операторной форме модель имеет вид [9]

$$W(s) = \frac{K_{oy}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-s\tau}. \quad (14)$$

В отличие от модели первого порядка она имеет не одну, а две инерционности T_1 и T_2 .

Модель регулятора обычно строится по схеме П/ПИ/ПИД в зависимости от критериев оптимизации САР [10]. ПИД-регулятор является общим случаем, П- и ПИ-регуляторы можно рассматривать как его частные случаи, когда интегральный и дифференциальный коэффициенты передачи равны нулю [11].

Уравнение, описывающее работу ПИД-регулятора, имеет вид:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{1}{T_{инт}} \int_0^{T_{инт}} e(t) dt + T_{диф} \frac{de(t)}{dt}, \quad (15)$$

где K_p – пропорциональный коэффициент передачи; $T_{инт}$ – постоянная интегрирования; $T_{диф}$ – время предварения.

Передаточная функция имеет вид

$$R(s) = K_p + \frac{1}{T_{инт}s} + T_{диф}s. \quad (16)$$

При программной реализации ПИД-регуляторов есть свои особенности. Так, идеальное дифференцирующее звено заменяют на реальное с постоянной времени фильтра T_ϕ , причем обычно $T_\phi \ll T_d$.

Для физической реализации ПИД-регулятора обычно вводят нелинейности типа «насыщение» и «мертвая зона» [12-14].

В графическом виде динамическая модель САР имеет вид (рис.2).

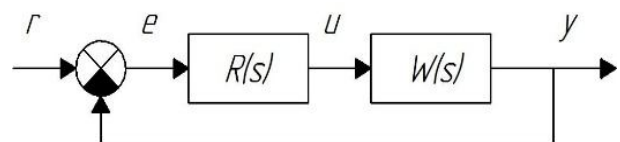


Рис. 2. Структурная схема САР

Fig. 2. Structural diagram of the SAR

Численная модель (метод Эйлера).

Инерционное звено описывается дифференциальным уравнением вида

$$T_{из} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_{из} \cdot x(t). \quad (17)$$

Выполнив замену вида

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (18)$$

получим выражение

$$T_{из} \cdot \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} + y(t) = K_{из} \cdot x(t). \quad (19)$$

В выражениях (18) и (19) общепринятое обозначение Δt соответствует шагу интегрирования h в уравнении (6).

Выразив функцию $y(t)$ из (19), получим

$$y(t) = \frac{T_{из}}{T_{из} + \Delta t} \cdot y(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{T_{из} + \Delta t} \cdot K_{из} \cdot x(t). \quad (20)$$

Звено запаздывания описывается уравнением вида

$$y(t) = K_{\text{зап}} \cdot x(t - \tau). \quad (21)$$

Интегральная компонента ПИД-регулятора описывается уравнением вида

$$y(t) = \frac{1}{T_{\text{инт}}} \cdot \int_0^t x(t) dt. \quad (22)$$

Выполнив замену вида (18), получим

$$y(t) = y(t - \Delta t) + \frac{x(t)}{T_{\text{инт}}} \cdot \Delta t. \quad (23)$$

Дифференциальная компонента ПИД-регулятора описывается уравнением вида

$$T_{\text{ф}} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_{\text{диф}} \cdot \frac{dx(t)}{dt}. \quad (24)$$

$$\begin{cases} e(t) = r(t) - y(t), \\ u(t) = K_{\text{п}} e(t) + \left(u(t - \Delta t) + \frac{e(t)}{T_{\text{инт}}} \cdot \Delta t \right) + \\ + \left(\frac{1}{T_{\text{ф}} + \Delta t} \cdot \left(T_{\text{ф}} \cdot u(t - \Delta t) + T_{\text{диф}} \cdot (e(t) - e(t - \Delta t)) \right) \right), \\ u_1(t) = \frac{T_{\text{из}}}{T_{\text{из}} + \Delta t} \cdot u_1(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{T_{\text{из}} + \Delta t} \cdot K_{\text{из}} \cdot u(t), \\ y(t) = K_{\text{зап}} \cdot u_1(t - \tau). \end{cases} \quad (26)$$

В системе (26) выражение $u_1(t)$ соответствует выходу инерционного звена и входу звена запаздывания.

Выполнив замену вида (18), получим

$$y(t) = \frac{1}{T_{\text{ф}} + \Delta t} \cdot T_{\text{ф}} \cdot y(t - \Delta t) + T_{\text{диф}} \cdot (x(t) - x(t - \Delta t)). \quad (25)$$

Ввиду высшего порядка малости $T_{\text{ф}} \ll T_{\text{диф}}$ постоянная фильтра вносит незначительную погрешность в расчет, обеспечивая при этом физическую реализуемость производной и помехоустойчивость [15-17].

С учетом вышеперечисленного в обозначениях (рис.2) система уравнений для дискретного описания динамики САР с объектом первого порядка имеет вид

Для объекта второго порядка система уравнений для дискретного описания динамики САР имеет вид:

$$\begin{cases} e(t) = r(t) - y(t), \\ u(t) = K_{\text{п}} e(t) + \left(u(t - \Delta t) + \frac{e(t)}{T_{\text{инт}}} \cdot \Delta t \right) + \\ + \left(\frac{1}{T_{\text{ф}} + \Delta t} \cdot \left(T_{\text{ф}} \cdot u(t - \Delta t) + T_{\text{диф}} \cdot (e(t) - e(t - \Delta t)) \right) \right), \\ u_1(t) = \frac{T_{\text{из1}}}{T_{\text{из1}} + \Delta t} \cdot u_1(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{T_{\text{из1}} + \Delta t} \cdot K_{\text{из1}} \cdot u(t), \\ u_2(t) = \frac{T_{\text{из2}}}{T_{\text{из2}} + \Delta t} \cdot u_2(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{T_{\text{из2}} + \Delta t} \cdot K_{\text{из2}} \cdot u_1(t), \\ y(t) = K_{\text{зап}} \cdot u_2(t - \tau). \end{cases} \quad (27)$$

В системе (27) выражение $u_1(t)$ соответствует выходу первого инерционного звена и входу второго инерционного звена. Выражение $u_2(t)$ соответствует выходу второго инерционного звена и

входу звена запаздывания. Индексы 1 и 2 в обозначениях коэффициентов передачи и постоянных времени соответствуют первому и второму инерционным звеньям соответственно.

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим численное моделирование системы уравнений (26) и (27).

Таблица 1. Исходные параметры**Table 1.** Initial parameters

Наименование /Name	Обозначение / Designation	Значение / Value	Размерность / Dimension
Характеристики системы с объектом 1-го порядка / Characteristics of a system with a 1st order object			
Коэффициент передачи / Transfer coefficient	K_1	1	–
Постоянная времени / Time constant	T_1	0,5	с
Транспортная задержка / Transport delay	τ	0,3	с
Характеристики системы с объектом 2-го порядка / Characteristics of a system with a 2nd order object			
Коэффициент передачи 1-го звена / Gear ratio of the 1st link	K_1	2,5	–
Постоянная времени 1-го звена / Time constant of the 1st link	T_1	0,3	с
Коэффициент передачи 2-го звена / 2nd link gear ratio	K_2	1,2	–
Постоянная времени 2-го звена / Time constant of the 2nd link	T_2	0,7	с
Транспортная задержка / Transport delay	τ	0,2	с

При выборе параметров объекта управления внимание уделялось в основном постоянным времени. Как будет показано ниже, относительно малые значения постоянных времени выбраны не случайно, а исходя из быстродействия ПЛК.

В качестве регуляторов рассматривались П-, ПИ- и ПИД-регуляторы. Их настройка выполнена по методу Циглера-Никольса [4, 18, 19, 20]. Результаты настройки приведены в табл. 2.

При выборе шага интегрирования использована теорема Котельникова, когда

Параметры моделирования для системы с объектами 1-го и 2-го порядка приведены в табл.1.

критерием эквивалентности является требование устойчивости цифровой модели. Так, для системы с объектом 1-го порядка выбран максимальный шаг 0,15 с, так как он является кратным транспортной задержке 0,3 с. Транспортная задержка – это минимальная постоянная времени объекта ($\tau=0,3 < T_1=0,5$). Для системы 2-го порядка при транспортной задержке 0,2 с выбран максимальный шаг 0,1 с. Транспортная задержка в данном случае – это также минимальная постоянная времени объекта ($\tau=0,2 < T_1=0,3 < T_2=0,7$).

Таблица 2. Параметры регуляторов

Table 2. Regulator parameters

Тип регулятора /Regulator type	K_p	K_i	K_d
Система с объектом 1-го порядка /System with 1st order object			
Пропорциональный / Proportional	1,67	-	-
Пропорционально-интегральный / Proportional-integral	1,5	1,67	-
Пропорционально-интегро- дифференциальный / Proportional-integro-differential	2	3,33	0,3
Система с объектом 2-го порядка / System with 2nd order object			
Пропорциональный / Proportional	0,15	-	-
Пропорционально-интегральный / Proportional-integral	0,69	1,14	-
Пропорционально-интегро- дифференциальный / Proportional-integro-differential	0,92	2,29	0,09

Невязка метода Эйлера определяется формулой

$$\psi_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)). \quad (28)$$

В исследовании оценена суммарная относительная погрешность для получения практических рекомендаций при выборе характеристик ПЛК исходя из заданной погрешности моделирования. Качество регулирования, как и его параметры, в работе не рассматриваются. Рассматривается лишь отклонение численного решения от аналитического.

Результат моделирования САР с объектом 1-го порядка с П-регулятором показан на рис. 3.

Результат моделирования САР с объектом 1-го порядка с ПИ-регулятором показан на рис. 4.

Результат моделирования САР с объектом 1-го порядка с ПИД-регулятором показан на рис.5.

Результат моделирования САР с объектом 2-го порядка с П-регулятором показан на рис. 6.

Результат моделирования САР с объектом 2-го порядка с ПИ-регулятором показан на рис. 7.

Результат моделирования САР с объектом 2-го порядка с ПИД-регулятором показан на рис. 8.

Относительные погрешности моделирования приведены в табл. 3.

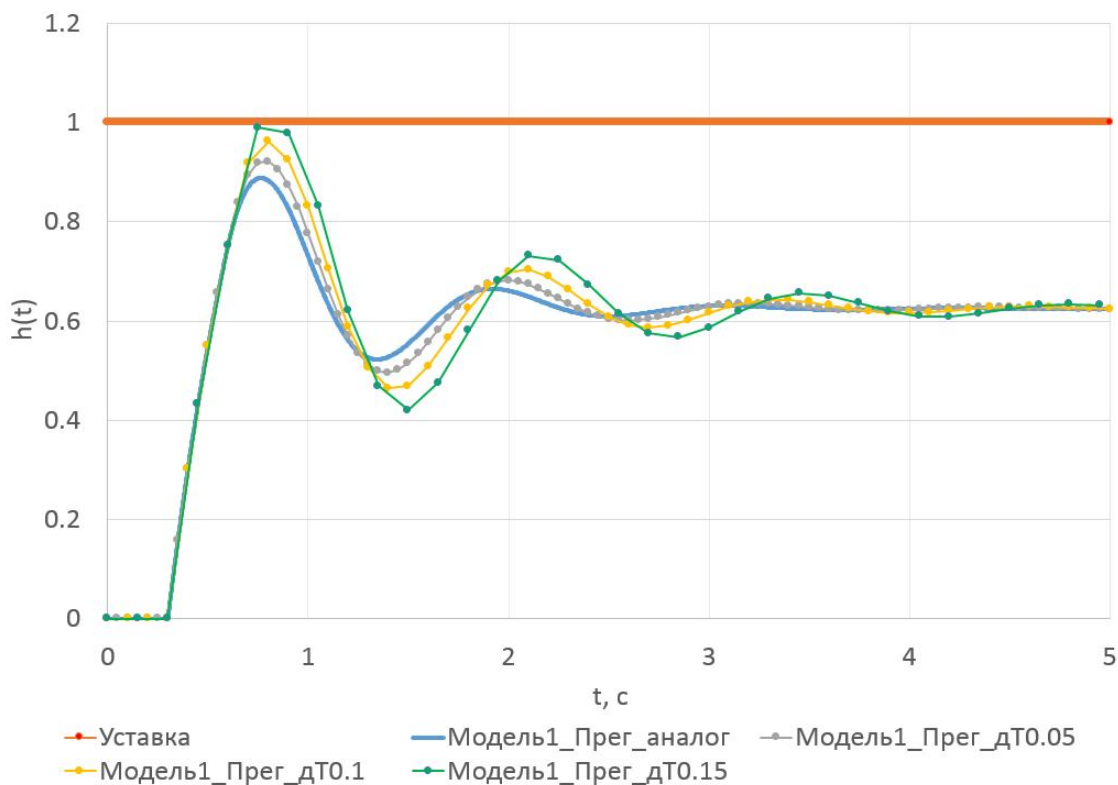


Рис. 3. Переходные характеристики САУ с объектом 1-го порядка и П-регулятором

Fig. 3. Transient characteristics of the automatic control system with a 1st order object and a P-controller

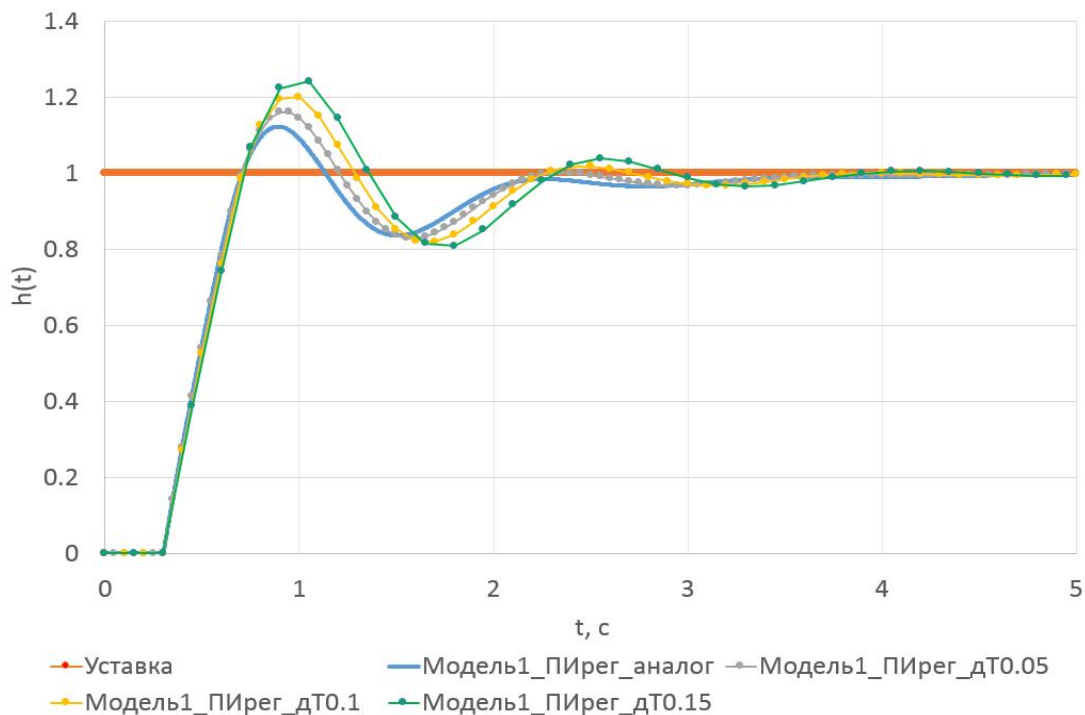


Рис. 4. Переходные характеристики САУ с объектом 1-го порядка и ПИ-регулятором

Fig. 4. Transient characteristics of the automatic control system with a 1st order object and a PI-controller

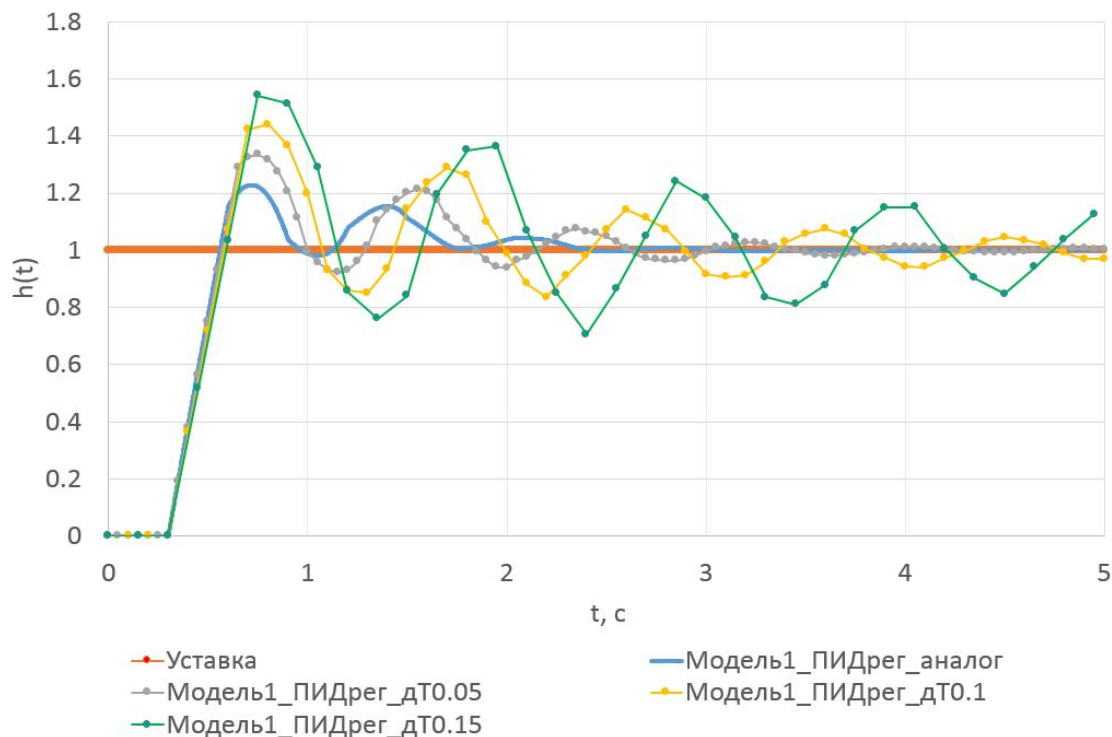


Рис. 5. Переходные характеристики САУ с объектом 1-го порядка и ПИД-регулятором

Fig. 5. Transient characteristics of the automatic control system with a 1st order object and a PID-controller

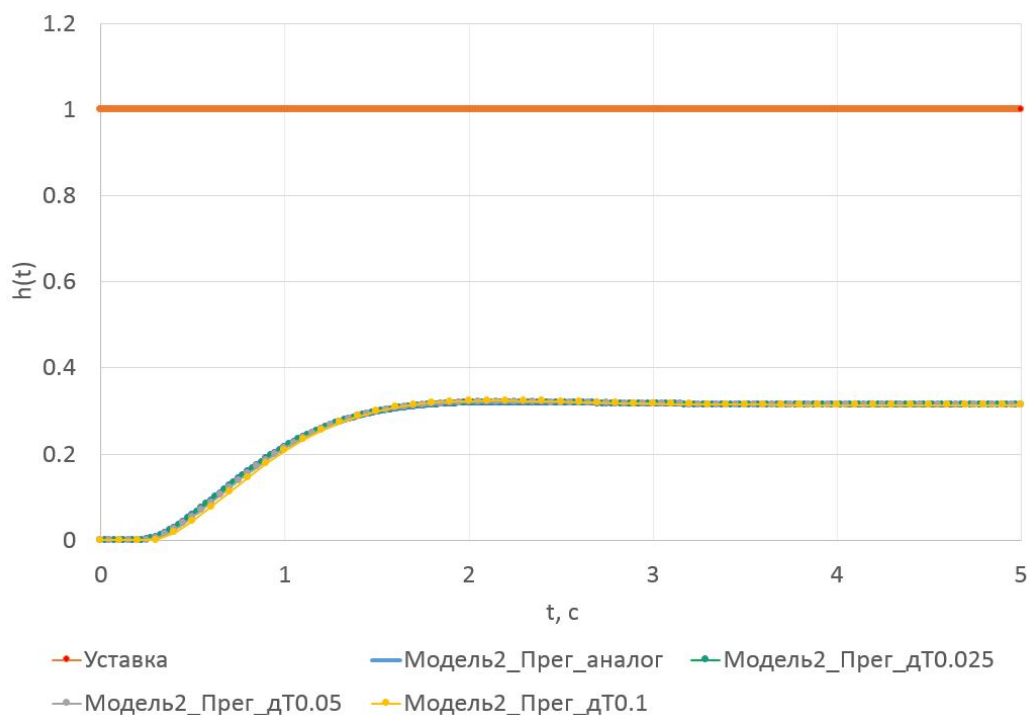


Рис. 6. Переходные характеристики САУ с объектом 2-го порядка и П-регулятором

Fig. 6. Transient characteristics of the automatic control system with a 2st order object and a P-controller

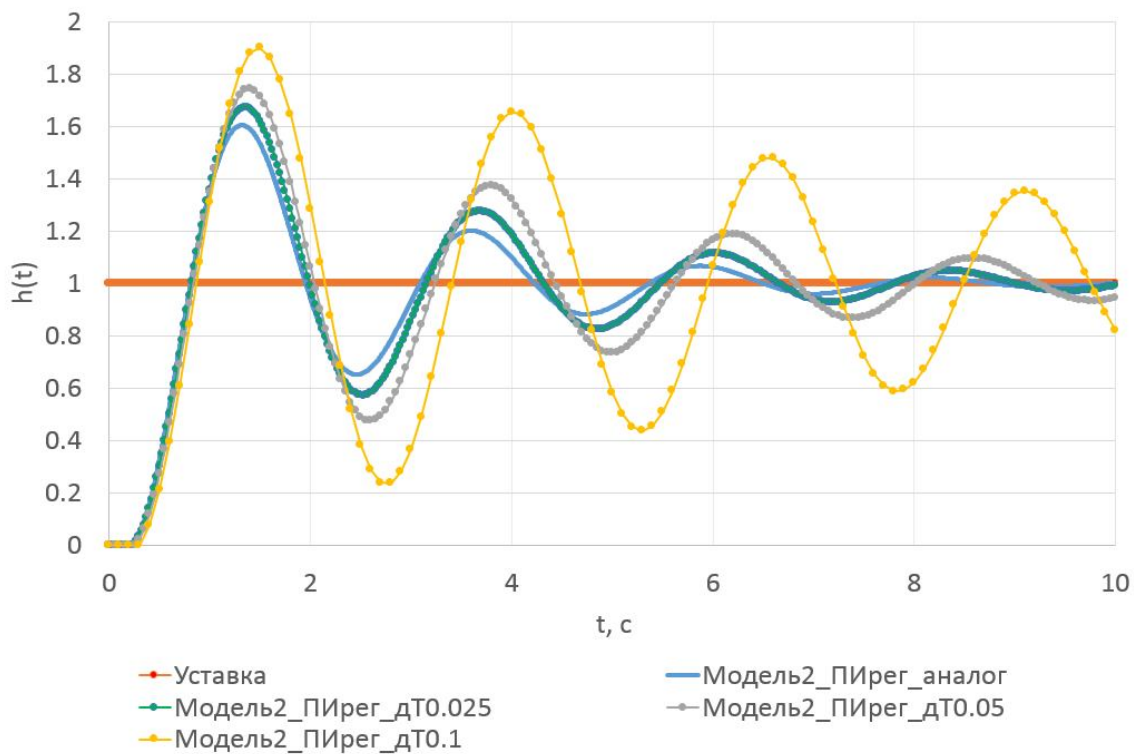


Рис. 7. Переходные характеристики САУ с объектом 2-го порядка и ПИ-регулятором

Fig. 7. Transient characteristics of the automatic control system with a 2st order object and a PI-controller

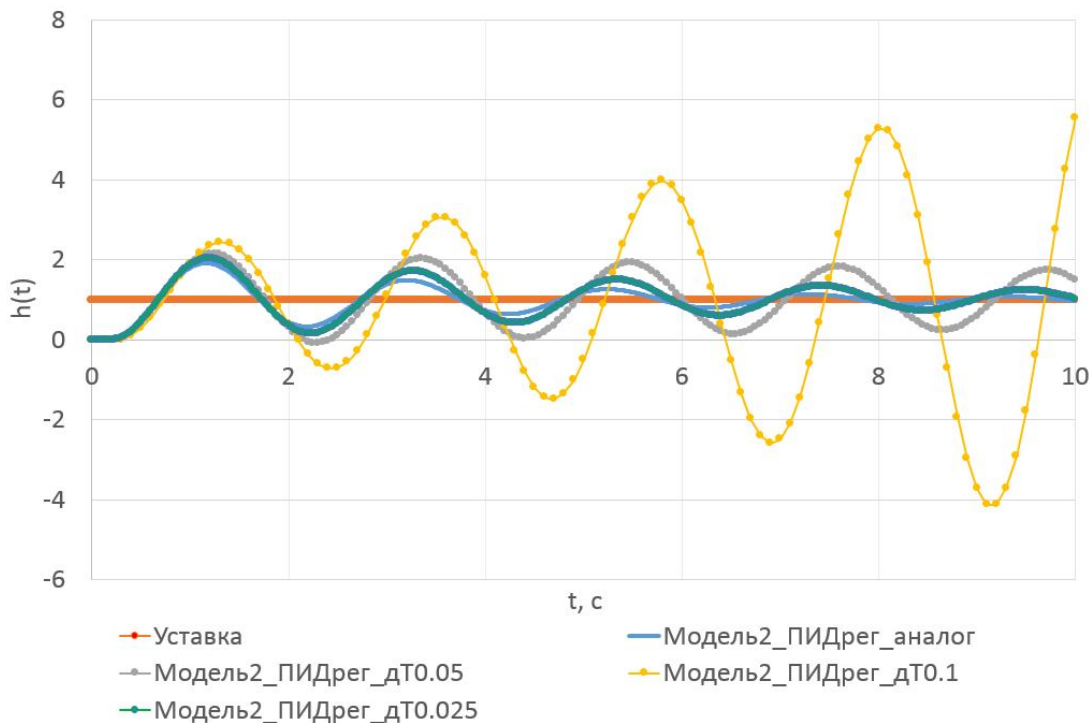


Рис. 8. Переходные характеристики САУ с объектом 2-го порядка и ПИД-регулятором

Fig. 8. Transient characteristics of the automatic control system with a 2st order object and a PID-controller

Таблица 3. Результаты моделирования

Table 3. Simulation results

Система с объектом 1-го порядка / System with 1st order object			
Шаг интегрирования, с / Integration step, s	$h_1=0,05$	$h_2=0,1$	$h_3=0,15$
П-регулятор / P-regulator	7,3	15,8	24,4
ПИ-регулятор / PI-regulator	6	13,1	20,4
ПИД-регулятор - PID-regulator	16	31,8	45,6
Система с объектом 2-го порядка / System with 2nd order object			
Шаг интегрирования, с / Integration step, s	$h_1=0,025$	$h_2=0,05$	$h_3=0,1$
П-регулятор / P-regulator	22,8	47,5	45,8
ПИ-регулятор / PI-regulator	14,4	31,7	69,8
ПИД-регулятор / PID-regulator	55,7	123,7	-

Выводы

Результаты моделирования показывают, что для уверенного моделирования САР с объектом 1-го порядка при шаге интегрирования $h_1=0,05$ с относительная интегральная погрешность не превышает 10% для П- и ПИ-регуляторов. Если допуск можно увеличить до 20%, то удовлетворительные результаты могут быть получены ПИД-регулятора ($h_1 = 0,05$ с) и П- и ПИ-регулятора при $h_2 = 0,1$ с. Таким образом, адекватные результаты моделирования для объектов с малой постоянной времени $\tau=0,3$ с можно получить при цикле ПЛК 0,05 с и менее.

Для моделирования САР с объектом 2-го порядка при шаге интегрирования $h_1=0,025$ с относительная интегральная погрешность начинается от 14,4% и более для ПИ-регулятора. Эксперимент для ПИД-регулятора с шагом $h_3 = 0,15$ с отчетливо показывает потерю устойчивости цифровой модели САР, а не самого ПИД-регулятора, так как при уменьшении шага интегрирования наблюдается устойчивая тенденция к снижению колебаний. Таким образом, адекватные результаты моделирования для объектов 2-го порядка с малой постоянной времени $\tau=0,2$ с можно получить при цикле ПЛК менее 0,025 с.

Список литературы

1. Денисенко В.В. ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации // Современные технологии автоматизации. 2006. № 4. С. 66-74; 2007. № 1. С. 78 - 88.
2. Демин И.О., Саблина Г.В. Исследование методов настройки параметров ПИД-регулятора // Автоматика и программная инженерия. 2020. №1(31). С. 174 - 181.
3. Хандожко В. А., Матлахов В. П. Математическая модель технологического участка магистрального трубопровода с регулированием дросселированием// Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2023. №. 4(22). С. 18-27. DOI: 10.30987/2658-6436-2023-4-18-27.
4. Саблина Г.В., Маркова В.А. Настройка параметров ПИД-регулятора в системе с объектом второго порядка с запаздыванием // Автометрия. 2022. Т.58, №4. С. 110 - 117. DOI: 10.15372/AUT20220411.

5. Горячев О. В., Калиничев К. Н. Анализ методов настройки, оптимизации и адаптации ПИД-регуляторов // Известия ТулГУ. Технические науки. 2024. Вып.10. С. 526 - 530. DOI: 10.24412/2071-6168-2024-10-526-527.

6. Воробьев В. Ю., Саблина Г. В. Расчёт и оптимизация параметров дискретного ПИД-регулятора методом Циглера – Никольса // Автоматика и программная инженерия. 2019. Т. 27, № 1. С. 9 – 13.

7. Синтез робастных ПИД-регуляторов методом двойной оптимизации / В.А. Жмудь, А.С. Востриков, А.Ю. Ивойлов, Г.В. Саблина // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 2. С.67 – 74. DOI: 10.17587/mau.21.67-73.

8. Arun Muraleedharan, Hiroyuki Okuda, Tatsuya Suzuki. Real-time implementation of randomized model predictive control for autonomous driving //IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. 2021. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/ Model_predictive_control](https://en.wikipedia.org/wiki/Model_predictive_control) (дата обращения: 16.03.2025).

9. Davut Izci, Serdar Ekinici, Abdelazim G. Hussien. Effective PID controller design using a novel hybrid algorithm for high order systems // PLOS ONE. 2023. URL: [https:// journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0286060](https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0286060) (дата обращения: 13.03.2025).

10. Design of simple nonovershooting controllers for linear high order systems with or without time delay / Huanchao Du, Bobo Feng, Jieshi Shen, Dan Li. // Scientific Reports. 2024. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-023-49802-x#Sec2> (дата обращения: 13.04.2025).

11. Linear Tracking MPC for Nonlinear Systems – Part I: The Model-Based Case / Julian Berberich, Johannes Köhler, Matthias A. Müller, Frank Allgöwer // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67(9). P. 4390–4405. URL: [https://arxiv.org/abs/ 2105.08560](https://arxiv.org/abs/2105.08560) (дата обращения: 16.03.2025).

12. Stability properties of multistage nonlinear model predictive control / Lucia Sergio, Subramanian Sankaranarayanan, Limon Daniel, Engell Sebastian // Systems & Control Letters, 2020. Vol. 143(9). URL: [https://www.researchgate.net/publication/ 343213495_Stability_properties_of_multistage_nonlinear_model_predictive_control](https://www.researchgate.net/publication/343213495_Stability_properties_of_multistage_nonlinear_model_predictive_control) (дата обращения: 16.04.2025).

13. Principles of PID Controllers / Muhammad Abdillah, Tirta Jayadiharja, R Harry Arjadi, Herlambang Setiadi, Ramon Zamora, Yusrizal Afif. 2023. URL: [https:// www.zhinst.com/sites/default/files/documents/202307/ zi_whitepaper_principles_of_pid_controllers.pdf](https://www.zhinst.com/sites/default/files/documents/202307/zi_whitepaper_principles_of_pid_controllers.pdf) (дата обращения: 16.04.2025).

14. Muraleedharan Arun. Real-Time Implementation of Randomized Model Predictive Control for Autonomous Driving // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. 2021. Vol. 7(1). P. 11–20. URL: [https://www.researchgate.net/publication/ 349726810_Realttime_Implementation_of_Randomized_Model_Predictive_Control_for_Autonomous_Driving](https://www.researchgate.net/publication/349726810_Realttime_Implementation_of_Randomized_Model_Predictive_Control_for_Autonomous_Driving) (дата обращения: 16.04.2025).

15. Nikolaou Michael. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs // Advances in Chemical Engineering. 2001. Vol. 26. P. 131-204. URL: [https:// www.researchgate.net/publication/ 222658127_Model_predictive_controllers_A_critical_synthesis_of_theory_and_industrial_needs](https://www.researchgate.net/publication/222658127_Model_predictive_controllers_A_critical_synthesis_of_theory_and_industrial_needs) (дата обращения: 16.04.2025).

16. Performance and robustness analysis of V-Tiger PID controller for automatic voltage regulator / Pasala Gopi, S. Venkateswarlu Reddy, Mohit Bajaj, Ievgen Zaitsev, Lukas Prokop // *Scientific Reports*. 2024. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-024-58481-1#Bib1> (дата обращения: 13.04.2025).

17. Roberto Sanchis. Optimal tuning of PID controllers with derivative filter for stable processes using three points from the step response. *Control Engineering // ISA Transactions*. 2023. Vol. 153. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057823004627> (дата обращения: 13.04.2025).

18. Миллер Ю. В., Саблина Г. В. Расчёт параметров ПИД-регулятора // *Автоматика и программная инженерия*. 2020. Т. 31, № 1. С. 148 - 153.

19. О целесообразности и возможностях аппроксимации звена с чистым запаздыванием / В. А. Жмудь, Л. Димитров, Г. В. Саблина [и др.] // *Информатика и автоматизация*. 2022. Т. 21, № 1. С. 41 - 67. DOI: 10.15622/ia.2022.21.2.

20. Aghil Ahmadi, Reza Mahboobi Esfanjani. Automatic tuning of PID controllers using deep recurrent neural networks with pruning based on tracking error // *IOPscience. Journal of Instrumentation*. 2024. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1748-0221/19/02/P02028/pdf> (дата обращения: 13.03.2025).

References

1. Denisenko V. V. PID controllers: principles of construction and modification. *Sovremennye tekhnologii avtomatizatsii = Modern automation technologies*. 2006; (4): 66-74; 2007; (1): 78 - 88. (In Russ.).

2. Demin I.O., Sablina G.V. Study of methods for tuning PID controller parameters. *Avtomatika i programnaya inzheneriya = Automation and software engineering*. 2020; (1): 174 - 181. (In Russ.).

3. Khandozhko V. A., Matlakhov V. P. Mathematical model of a process section of a main pipeline with throttling control. *Avtomatizatsiya i modelirovanie v proektirovanii i upravlenii = Automation and modeling in design and control*. 2023; (4): 18-27. (In Russ.). DOI: 10.30987/2658-6436-2023-4-18-27.

4. Sablina G. V., Markova V. A. Tuning the parameters of a PID controller in a system with a second-order object with delay. *Avtometriya*. 2022; 58(4): 110 - 117. (In Russ.). DOI: 10.15372/AUT20220411.

5. Goryachev O.V., Kalinichev K.N. Analysis of methods for tuning, optimization and adaptation of PID controllers. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki = Bulletin of Tula State University. Technical sciences*. 2024; (10): 526 - 530. (In Russ.). DOI: 10.24412/2071-6168-2024-10-526-527.

6. Vorobyov V. Yu., Sablina G. V. Calculation and optimization of discrete PID controller parameters using the Ziegler – Nichols method. *Avtomatika i programnaya inzheneriya = Automation and Software Engineering*. 2019; 27(1): 9 – 13. (In Russ.).

7. Zhmud V. A., Vostrikov A. S., Ivoylov A. Yu., Sablina G. V. Synthesis of robust PID controllers using the double optimization method. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie = Mechatronics, automation, control*. 2020; 21(2): 67 – 74. (In Russ.). DOI: 10.17587/mau.21.67-73.

8. Arun Muraleedharan, Hiroyuki Okuda, Tatsuya Suzuki. Real-time implementation of randomized model predictive control for autonomous driving. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. 2021. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Model_predictive_control (access date: 16.03.2025).

9. Davut Izci, Serdar Ekinici, Abdelazim G. Hussien. Effective PID controller design using a novel hybrid algorithm for high order systems. *PLOS ONE*. 2023. Available at: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0286060> (access date: 13.03.2025).

10. Huanchao Du, Bobo Feng, Jieshi Shen & Dan Li. Design of simple nonovershooting controllers for linear high order systems with or without time delay. *Scientific Reports*. 2024. Available at: <https://www.nature.com/articles/s41598-023-49802-x#Sec2> (access date: 13.03.2025).

11. Julian Berberich, Johannes Köhler, Matthias A. Müller, Frank Allgöwer. Linear Tracking MPC for Nonlinear Systems. Part I: The Model-Based Case. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022; 67(9): 4390–4405. Available at: <https://arxiv.org/abs/2105.08560> (access date: 16.03.2025).

12. Lucia Sergio, Subramanian Sankaranarayanan, Limon Daniel, Engell Sebastian. Stability properties of multistage nonlinear model predictive control. *Systems & Control Letters*. 2020; 143(9). Available at: https://www.researchgate.net/publication/343213495_Stability_properties_of_multistage_nonlinear_model_predictive_control (accessed: 16.04.2025).

13. Muhammad Abdillah, Tirta Jayadiharja, R Harry Arjadi, Herlambang Setiadi, Ramon Zamora, Yusrizal Afif. *Principles of PID Controllers*. 2023. Available at: https://www.zhinst.com/sites/default/files/documents/202307/zi_whitepaper_principles_of_pid_controllers.pdf (access date: 16.04.2025).

14. Muraleedharan Arun. Real-Time Implementation of Randomized Model Predictive Control for Autonomous Driving. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. 2021; 7(1): 11–20. Available at: https://www.researchgate.net/publication/349726810_Realttime_Implementation_of_Randomized_Model_Predictive_Control_for_Autonomous_Driving (access date: 16.04.2025).

15. Nikolaou Michael. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. *Advances in Chemical Engineering*. 2001; 26: 131-204. Available at: https://www.researchgate.net/publication/222658127_Model_predictive_controllers_A_critical_synthesis_of_theory_and_industrial_needs (access date: 16.04.2025).

16. Pasala Gopi, S. Venkateswarlu Reddy, Mohit Bajaj, Ievgen Zaitsev & Lukas Prokop. Performance and robustness analysis of V-Tiger PID controller for automatic voltage regulator. *Scientific Reports*. 2024. Available at: <https://www.nature.com/articles/s41598-024-58481-1#Bib1> (access date: 13.04.2025).

17. Roberto Sanchis. Optimal tuning of PID controllers with derivative filter for stable processes using three points from the step response. *Control Engineering. ISA Transactions*. 2023; 153. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057823004627> (access date: 13.04.2025).

18. Miller Yu. V., Sablina G. V. Calculation of PID controller parameters. *Avtomatika i programmnyaya inzheneriya = Automation and Software Engineering*. 2020; 31 (1): 148 - 153. (In Russ.).

19. Zhmud V. A., Dimitrov L., Sablina G. V., et al. On the feasibility and possibilities of approximating a link with pure delay. *Informatika i avtomatizatsiya = Informatics and automation*. 2022; 21(1): 41 - 67. (In Russ.). DOI: 10.15622/ia.2022.21.2.

20. Aghil Ahmadi, Reza Mahboobi Esfanjani. Automatic tuning of PID controllers using deep recurrent neural networks with pruning based on tracking error. IOPscience. *Journal of Instrumentation*. 2024. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1748-0221/19/02/P02028/pdf> (access date: 12.03.2025).

Информация об авторах / Information about the Authors

Хандожко Виктор Александрович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Автоматизированные технологические системы», Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Российская Федерация, e-mail: vichandozhko@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5212-0616>

Viktor A. Khandozhko, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Head of the Automated Technological Systems Department, Bryansk State Technical University, Bryansk, Russian Federation, e-mail: vichandozhko@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5212-0616>

Федонин Олег Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматизированные технологические системы», Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Российская Федерация, e-mail: fedonin@tu-bryansk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3511-699X>

Oleg N. Fedonin, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Professor of the Automated Technological Systems Department, Bryansk State Technical University, Bryansk, Russian Federation, e-mail: fedonin@tu-bryansk.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3511-699X>

Матлахов Виталий Павлович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Автоматизированные технологические системы», Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Российская Федерация, e-mail: jed80@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8779-9565>

Vitaly P. Matlakhov, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the of Automated Technological Systems Department, Bryansk State Technical University, Bryansk, Russian Federation, e-mail: jed80@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8779-9565>

Хандожко Александр Владимирович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Металлорежущие станки и инструменты», Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Российская Федерация, e-mail: chandosh@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0604-8537>

Alexander V. Khandozhko, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Professor of the Metal-Cutting Machines and Tools Department, Bryansk State Technical University, Bryansk, Russian Federation, e-mail: chandosh@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0604-8537>