

## Оригинальная статья / Original article

УДК 004

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-3-245-264>

## Обработка вычислительной системой зашумленных конструктивных входных данных

А. П. Локтионов<sup>1</sup> ✉, Э. И. Ватутин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет  
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: loara@mail.ru

### Резюме

**Цель исследования.** Цель данного исследования – решение задачи восстановления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему и оценка влияния на точность решения задачи погрешности зашумленных прогибов – конструктивных входных данных вычислительной системы.

**Методы.** Основными научными методами, применяемыми в рамках данного исследования, являются методы моделирования и идентификации граничных условий, сеточный метод регуляризации решения обратных некорректных задач. Также используются методы редукции измерений и аппроксимации, методы оценки качества обработки входных данных, алгоритмов регуляризации и аппроксимации с использованием сеточной функции Лебега абсолютным числом обусловленности задачи и минимума функции Лебега целевым параметром, численные методы. При условии равномерной непрерывной нормы абсолютной погрешности входных данных в выводе явных формул начальных параметров упругой линии балки и внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему применен метод решения обратной задачи Коши для уравнения прогибов балки.

**Результаты.** Основной результат настоящей работы представляет собой теоремы об изгибающем моменте и силе на свободном конце консольной балки. Полученные равенства позволяют применить результаты решения обратной задачи Коши для уравнения прогибов балки при восстановлении внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему. Доказано существование и единственность решения. Также результатами являются формулы множителей Лагранжа в линейной лагранжевой аппроксимации и оптимальный план координат узлов сетки аппроксимации по чебышёвскому альтернансу для уравнения прогибов балки четвертой и пятой степени. Проведена оценка качества приближения внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему значениями целевых параметров.

**Заключение.** В данной статье предложен метод решения задачи восстановления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему с применением результатов решения обратной задачи Коши для уравнения прогибов балки с минимизацией влияния погрешности зашумленных конструктивных входных данных на точность решения задачи.

**Ключевые слова:** модель математическая; обратная задача Коши; балка; прогиб; вычислительная система; функция Лебега.

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Локтионов А. П. Обработка вычислительной системой зашумленных конструктивных входных данных // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024. Т. 28, №3. С. 245-264. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-3-245-264>.

Поступила в редакцию 06.06.2024

Подписана в печать 02.08.2024

Опубликована 30.09.2024

## Measuring-polynomial processing of input data of a computer system

Askold P. Loktionov <sup>1</sup>, Eduard I. Vatutin ✉

<sup>1</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: loapa@mail.ru

### Abstract

**Purpose of research.** The purpose of this study is to solve the problem of restoring the external load on the rack-and-beam structural system and to assess the impact on the accuracy of solving the problem of the error of noisy deflections – constructive input data of the computing system.

**Methods.** The main scientific methods used in this study are methods of modeling and identification of boundary conditions, the grid method of regularization of solving inverse incorrect problems. Measurement reduction and approximation methods, methods for evaluating the quality of input data processing, regularization and approximation algorithms using the Lebesgue grid function, and numerical methods are also used.

**Results.** The main result of this work is two theorems about the external load on a rack-and-beam structural system. The existence and uniqueness of the solution is proved. Also, the results are the formulas of Lagrange multipliers in linear Lagrangian approximation and the optimal plan of coordinates of the nodes of the approximation grid for the equation of deflections of the beam of the fourth and fifth degree with Chebyshev alternance. An assessment of the quality of the approximation of the external load on the rack-and-beam structure by the values of the target parameters was carried out.

**Conclusion.** This article proposes a method for restoring the external load on a rack-and-beam structure using the results of solving the inverse Cauchy problem for the equation of deflections of a beam with minimizing the influence of the error of noisy input data.

**Keywords:** mathematical model; inverse Cauchy problem; beam; deflection; computing system; Lebesgue function.

**Conflict of interest.** The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Loktionov A. P., Vatutin E. I. Measuring-polynomial processing of input data of a computer system. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta* = *Proceedings of the Southwest State University*. 2024; 28(3): 245-264 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-3-245-264>.

Received 06.06.2024

Accepted 02.08.2024

Published 30.09.2024

\*\*\*

### Введение

Объектом исследования являются  
стоечно-балочные конструктивные си-

стемы. Значительное количество отече-  
ственных и зарубежных научных пуб-

ликаций посвящено аналитическому и инструментальному исследованию элементов строительных конструкций, задачам идентификации, которые связаны с проблемами мониторинга и диагностики механического состояния конструкций [1-10]. Например, в работе [10] представлена процедура моделирования и идентификации граничных условий для консольно-подобных структур. Задача восстановления целевых характеристик стоечно-балочной конструктивной системы как коэффициентная обратная задача для алгебраических многочленов относится к обратным задачам строительной механики, родственным обратным задачам математической физики [7, 8, 11, 12]. Задача решается вычислительной системой, реализующей алгоритм оценки конструкций параметрами идентификации [3, 10, 11, 13-16]. В обратных задачах получаемые экспериментально зашумленные входные данные вызывают большое возмущение решения [17, 14]. Интервальный анализ позволяет учитывать неопределённости и неоднозначности постановки задачи [18, 19].

В коэффициентной обратной задаче Коши применительно к уравнению прогибов при плоском изгибе балки с зашумленными значениями прогибов (конструктивных входных данных вычислительной системы) выполнены исследования по восстановлению непосредственно не измеряемых целевых характеристик: коэффициентов многочлена – уравнения упругой линии балки и начальных параметров упругой ли-

нии, а также по связи точности экспериментальных входных данных с точностью результатов обратной задачи [7, 10, 20]. В этих исследованиях эффективно используются приемы вычислительной математики: сеточный метод решения обратных некорректных задач; регуляризация решения [10, 12, 20-24]; управление распределением узлов сетки аппроксимации параметрами регуляризации, в том числе с учетом связи структуры сетки аппроксимации с чебышёвским альтернансом при равномерной непрерывной норме абсолютной погрешности входных данных [21, 22, 24, 26-30]; редукция измерений [31-33]; конечномерная линейная лагранжева аппроксимация [27, 30]; использование функции и константы Лебега в показателях качества обработки входных данных и алгоритмов оценки регуляризации и аппроксимации [8, 34]; численные методы [8, 35]. При этом в исследованиях уделено мало внимания восстановлению нагрузок на конструктивные системы – важному компоненту диагностики механического состояния конструкций [36, 37]. Актуально дополнить ранее выполненные исследования изучением восстановления нагрузок на стоечно-балочную конструктивную систему.

Цель данной статьи – разработка методики восстановления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему при плоском изгибе балки в условиях зашумленных измеряемых прогибомерами входных данных вычислительной системы.

## Материалы и методы

На рис. 1 представлена консольная балка постоянного сечения при плоском изгибе в главной плоскости  $uoz$  комбинированной внешней нагрузкой изгибающим моментом  $M$  и силой  $P$  на свободном конце балки, а также распределенной по балке нагрузкой  $q$ .

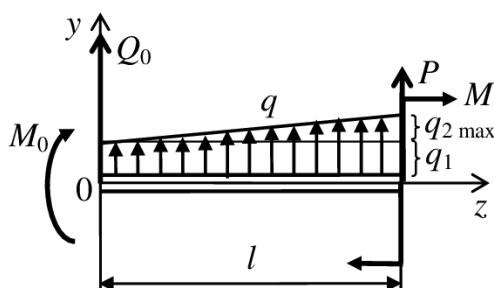


Рис. 1. Балка с внешней нагрузкой

Fig. 1. A beam with an external load

На примере балки (см. рис. 1) рассмотрим обратную задачу Коши относительно начальных параметров упругой линии балки, а также определение внешней нагрузки на балку.

На основании гипотезы плоских сечений дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид

$$\frac{d^5 y(z)}{dz^5} = \frac{q_{2\max}}{EI}, \quad (1)$$

где  $y(z)$  – упругое смещение центра тяжести сечения балки вдоль оси  $z$ ;  $q_{2\max}$  – максимальное значение линейно возрастающей распределенной нагрузки  $q_2(z) = q_{2\max}z/l$ ;  $EI$  – жесткость сечения балки на изгиб.

В отсутствии распределенной моментной нагрузки (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{dM(z)}{dz} &= Q(z), \\ \frac{dQ(z)}{dz} &= q(z), \\ \frac{dq(z)}{dz} &= \frac{q_{2\max}}{l}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M(z)$  – изгибающий момент в сечении балки;  $Q(z)$  – перерезывающая сила в сечении;  $q(z) = q_1 + q_2(z)$  – распределенная нагрузка.

Краевые условия для уравнения (1) относятся к значениям прогиба  $y$ , угла поворота  $dy/dz$ , изгибающего момента  $M(z)$  и перерезывающей силы  $Q(z)$ .

Нормальные фундаментальные функции приведенного к уравнению (1) однородного уравнения  $d^5 y(z)/dz^5 = 0$  имеют вид  $Y_0(z) = 1$ ,  $Y_1(z) = z$ ,  $Y_2(z) = z^2/2!$ ,  $Y_3(z) = z^3/3!$ . Общий интеграл уравнения (1):

$$\begin{aligned} y(z) &= y(0)Y_0(z) + \frac{dy}{dz}(0)Y_1(z) + \\ &+ \frac{d^2 y}{dz^2}(0)Y_2(z) + \frac{d^3 y}{dz^3}(0)Y_3(z) + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^z q(s)Y_3(z-s)ds \end{aligned}$$

или с учетом соотношений (2)

$$\begin{aligned} y(z) &= y(0) + \frac{dy}{dz}(0)z + \frac{M_0}{EI} \frac{z^2}{2!} + \\ &+ \frac{Q_0}{EI} \frac{z^3}{3!} + \frac{q_1}{EI} \frac{z^4}{4!} + \frac{q_{2\max}}{EI} \frac{z^5}{5!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  – начальные параметры упругой линии балки (уравнения прогибов балки (1)), которые в обратной задаче Коши в строительной механике вычисляют в качестве целевых характеристик задачи.

Уравнение (3) в компактной форме представляем многочленом

$$y(z) = \sum_{r=0}^5 a_r \frac{z^r}{r!}, \quad a_5 \neq 0. \quad (4)$$

Многочлен пятой степени (4) при усложнении вида распределенной нагрузки в сравнении с нагрузкой, представленной на рис. 1, обобщаем до многочлена

$$y_n(a, z) = \sum_{r=0}^n a_{n,r} \frac{z^r}{r!}, \quad a_{n,n} \neq 0, \quad (5)$$

где

$$a_{n,0} = y(0); \quad a_{n,1} = y'(0); \quad a_{n,2} = \frac{M_0}{EI};$$

$$a_{n,3} = \frac{Q_0}{EI}; \quad a_{n,r} = \frac{q_{r-3\max}}{EI^{r-4}};$$

$$r \in (4, 5, \dots, n).$$

Вычислительная система реализует алгоритм получения коэффициентов  $a_{n,r}^*$  алгебраического многочлена

$$y_n^*(a^*, z) = \sum_{r=0}^n a_{n,r}^* \frac{z^r}{r!}, \quad (6)$$

приближенного соотношением  $a_{n,r} \approx a_{n,r}^*$  к многочлену (5).

Зашумленные конструктивные входные данные вычислительной системы – значения прогибов балки  $y_n^*(a^*, z_i)$ ,  $i \in (1, 2, \dots, n+1)$  на интервале  $[0, l]$  (см. рис. 1) от прогибомеров поступают на компонент информационно-вычислительной системы – техническое (аппаратное) средство для размещения входных данных. Входные данные измеряются на исследуемой конструкции в узлах сетки аппроксимации

$$0 \leq z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1} \leq l. \quad (7)$$

Коэффициентная обратная задача для уравнения прогибов балки моделируется совокупностью уравнений (5), (6), (7) и уравнениями:

$$a_{n,r} \approx a_{n,r}^* = \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,r,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right], \quad (8)$$

$$r \in (0, 1, \dots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_{n,r,i} z_i^j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq r \\ 1 & \text{при } j = r \end{cases}, \quad (9)$$

$$j = 0 : n, \quad r \in (0, 1, \dots, n);$$

$$R[y_n(a, z_i)] = y_n^*(a^*, z_i) - y_n(a, z_i); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_n(a, z_i)\| &= \Delta_{\max} [y_n(a, z_i)] \geq \\ &\geq \Delta y_n(a, z_i) = |R[y_n(a, z_i)]|; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta a_{n,r} = \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,r,i} \Delta y_n(a, z_i); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\max} [a_{n,r}] &\leq \\ &\leq \alpha_{n,r}(Z) \cdot \sup \Delta_{\max} [y_n(a, z_i)]; \end{aligned}$$

$$(13)$$

$$L_{n,r}(Z) = \sum_{i=1}^{n+1} |l_{n,r,i}|; \quad (14)$$

$$\Lambda_{n,r,s} = \min L_{n,r}(Z);$$

$$(15)$$

$$\alpha_{n,r}(Z) = L_{n,r}(Z) \rightarrow \min. \quad (16)$$

Для получения разрешенной системы уравнений воспользуемся условиями Лагранжа [29] в виде

$$\sum_{i=0}^n a_{n,r}^* \frac{z_i^r}{r!} = y_n^*(a^*, z), \quad i = 1 : n+1.$$

Тогда значения коэффициентов  $a_{n,r}$  вычисляются приближением с использованием линейной лагранжевой аппроксимации (8) в методе неопределенных коэффициентов. Формулы множителей Лагранжа  $l_{n,r,i}$ , в том числе мно-

жителей  $l_{n,2,i}$  и  $l_{n,3,i}$  для начальных параметров  $M_0$  и  $Q_0$ , получаются решением системы уравнений (9). Множители Лагранжа в формуле (8) представимы также в виде [28]

$$L_{n,r,i} = L_{n,0,i}^{(r)}(z)|_{z=0} \quad (17)$$

через базис Лагранжа

$$l_i(z) = L_{n,0,i}(z) = \frac{1}{\prod_n} \prod_{j=1}^{n+1} (z - z_j), j \neq i, \quad (18)$$

$$\text{где } \prod_n = \prod_{i=1}^{n+1} (z_i - z_j), j \neq i. \quad (19)$$

Частные формулы множителей Лагранжа имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{n,n,i} &= \frac{n!}{\prod_n}; \\ L_{n,n-1,i} &= -\frac{(n-1)!}{\prod_n} \sum_{j=1}^{n+1} z_j, j \neq i; \\ L_{n,n-2,i} &= \frac{(n-2)!}{\prod_n} \sum_{m=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} z_j z_m, \quad (20) \\ i &\neq j \neq m \neq i; \\ L_{n,n-3,i} &= -\frac{(n-3)!}{\prod_n} \sum_{m=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} z_j z_k z_m, \\ k &\neq i \neq j \neq k \neq m \neq i, j \neq m. \end{aligned}$$

Формулами (17) – (20) дополняем исследуемую математическую модель коэффициентной обратной задачи.

Используя апостериорно-интервальный анализ [10; 11] при выборе метрики, каждое из входных данных  $y_n^*(a^*, z_i)$  характеризуем погрешностью (10). В математической модели коэффициентной обратной задачи на точечном множестве  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$  применяем

равномерную непрерывную норму абсолютной погрешности (11) [10], дифференциал к оценке погрешности формул (8), в результате получаем суммарную абсолютную погрешность по всем узлам сетки аппроксимации (12).

Уровень погрешности вычисления коэффициентов  $a_{n,r}$ , эффективность обработки входных данных и решения коэффициентной обратной задачи оцениваем абсолютным числом обусловленности задачи  $\alpha_{n,r}(Z)$ , связывающим неравенством (13) верхние границы абсолютной погрешности решения  $\Delta_{\max}[a_{n,r}]$  и погрешности  $\Delta_{\max}[y_n(a, z_i)]$  многочлена (1) в узлах сетки (7). В соответствии с формулами (8), ..., (13) абсолютное число обусловленности задачи равно значению функции Лебега (14) [30], При заданном значении степени многочлена (5) функция Лебега зависит лишь от структуры сетки (7).

В оптимизационных исследованиях для минимизации влияния погрешности зашумленных входных данных на качество приближения используем специально сконструированную редукцией измерений структуру сетки (7). Для этого используем целевой параметр – константу Лебега второго рода  $\Lambda_{n,r,s}^1$  (15) [21], Считаем абсолютное число обусловленности задачи целевой функцией, решаем задачу минимизации числа обусловленности получением целевого параметра (15) по условию (16).

<sup>1</sup> s – первая буква слова second (второй).

Специально сконструированные узлы сетки (7) могут быть получены решением задачи (16). Задача может быть реализована прямым аналитическим методом разыскания частных производных функции Лебега (14) по переменным  $z_i$  на точечном множестве  $Z$  с учетом формул множителей Лагранжа  $l_{n,r,i}$  с последующим получением безусловного экстремума (минимума) и оптимального плана координат узлов сетки аппроксимации.

При выводе явных формул в радикалах оптимальных узлов сетки аппроксимации (7) с увеличением значений  $n$  и  $r$  в многочлене (5) усложняются формулы множителей Лагранжа, усложняется дифференцирование функции (14) с преобразованием дифференциалов для каждой координаты узлов в разрешающих уравнениях, а при вычислении корней разрешающих уравнения по теореме Абеля на степень уравнений накладывается ограничение. В качестве альтернативы дифференцированию функции (14) для решения задачи (16) и получения оптимальных координат узлов сетки аппроксимации используем предложенную в работе [21] связь распределения узлов сетки аппроксимации (7) с чебышёвским альтернансом экстремальных полиномов, в частности полинома Чебышёва первого рода.

Поставим задачу вычисления внешней нагрузки на балку с использованием математической модели коэффициентной

обратной задачи по значениям предварительно вычисленных коэффициентов  $a_{n,r}^*$  с обобщением сетки аппроксимации (7) на сетку

$$0 = z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1} = l. \quad (21)$$

## Результаты и их обсуждение

Лагранжева аппроксимация в модели обратной задачи Коши

Результаты вывода множителей Лагранжа  $l_{n,r,i}$  при  $n = 4, 5$  решением системы уравнений (9) и по формулам (17) показаны в табл. 1. Уже при  $n = 5$  в формулы множителей Лагранжа в виде дробей входят многочлены пятой степени, с увеличением  $n$  все сложнее получать множители Лагранжа решением системы уравнений (9) в сравнении с алгоритмическим методом использования формул (17).

Формулы функции Лебега  $\Lambda_{n,r}$  содержат дроби с многочленами степени более  $n$ , в частности, знаменатель функции Лебега  $\Lambda_{3,3}$  – многочлен четвертой степени. Функция Лебега  $\Lambda_{4,2}$  имеет вид алгебраической дроби, числитель которой многочлен восьмой степени, а знаменатель – десятой степени. Функция Лебега при  $n \geq 5$  имеет еще более сложный вид. Эти обстоятельства затрудняют получение аналитическим методом оптимальной структуры сетки (7) минимизацией числа обусловленности задачи целевым параметром (15) по условию (16).

**Таблица 1.** Формулы множителей Лагранжа  $l_{n,r,i}$ **Table 1.** Formulas of Lagrange multipliers  $l_{n,r,i}$ 

| $n$ | $r$ | $i$ | Множители Лагранжа $l_{n,r,i}$ / Lagrange multipliers $l_{n,r,i}$                                                  |
|-----|-----|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4   | 2   | 1   | $2 \frac{z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_4 z_5}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_1 - z_5)}$ |
|     |     | 2   | $2 \frac{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_4 z_5}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)}$ |
|     |     | 3   | $2 \frac{z_1 z_2 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_4 z_5}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)(z_3 - z_5)}$ |
|     |     | 4   | $2 \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_5 + z_3 z_5}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)}$ |
|     |     | 5   | $2 \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4}{(z_5 - z_1)(z_5 - z_2)(z_5 - z_3)(z_5 - z_4)}$ |
|     | 3   | 1   | $-6 \frac{z_2 + z_3 + z_4 + z_5}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_1 - z_5)}$                                    |
|     |     | 2   | $-6 \frac{z_1 + z_3 + z_4 + z_5}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)}$                                    |
|     |     | 3   | $-6 \frac{z_1 + z_2 + z_4 + z_5}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)(z_3 - z_5)}$                                    |
|     |     | 4   | $-6 \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_5}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)}$                                    |
|     |     | 5   | $-6 \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{(z_5 - z_1)(z_5 - z_2)(z_5 - z_3)(z_5 - z_4)}$                                    |
|     | 4   | 1   | $24 \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_1 - z_5)}$                                                        |
|     |     | 2   | $24 \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)}$                                                        |
|     |     | 3   | $24 \frac{1}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)(z_3 - z_5)}$                                                        |
|     |     | 4   | $24 \frac{1}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)}$                                                        |
|     |     | 5   | $24 \frac{1}{(z_5 - z_1)(z_5 - z_2)(z_5 - z_3)(z_5 - z_4)}$                                                        |

| n | r | i | Множители Лагранжа $\ln,r,i$ / Lagrange multipliers $\ln,r,i$                                                                                                         |
|---|---|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 | 2 | 1 | $-2 \frac{z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_5 + z_2 z_3 z_6 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_4 z_6 + z_4 z_5 z_6}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_1 - z_5)(z_1 - z_6)}$                |
|   |   | 2 | $-2 \frac{z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_3 z_6 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_4 z_6 + z_4 z_5 z_6}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)(z_2 - z_6)}$                |
|   |   | 6 | $-2 \frac{z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_5 + z_3 z_4 z_5}{(z_6 - z_1)(z_6 - z_2)(z_6 - z_3)(z_6 - z_4)(z_6 - z_5)}$                |
|   | 3 | 4 | $6 \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_5 + z_1 z_6 + z_2 z_3 + z_2 z_5 + z_2 z_6 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_5 z_6}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)(z_4 - z_6)}$ |
|   | 4 | 2 | $-24 \frac{z_1 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)(z_2 - z_6)}$                                                                     |
|   | 5 | 4 | $120 \frac{1}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)(z_4 - z_6)}$                                                                                               |

### Чебышёвская аппроксимация в коэффициентной обратной задаче

Из теоремы связи распределения узлов сетки аппроксимации (7) с чебышёвским альтернансом [21] получено для сетки (21) следствие об оптимальном плане координат узлов сетки аппроксимации по чебышёвскому альтернансу.

Следствие. Если в коэффициентной обратной задаче Коши известна степень  $n$  исследуемого алгебраического многочлена упругой линии балки, то при равномерной непрерывной норме абсолютной погрешности входных данных и результатов решения задачи для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления начальных параметров упругой линии балки и

внешней нагрузки на балку через коэффициенты алгебраического многочлена упругой линии балки оптимальная сетка аппроксимации с чебышёвским альтернансом представима точечным множеством

$$z_{n,i} = \left( 1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{n} \right) \frac{l}{2}, \quad i = 1 : n+1. \quad (22)$$

Безразмерные координаты  $z_{n,i,d}^1 = z_{n,i}/l$  узлов оптимальных сеток аппроксимации с точечным множеством (22) при  $n$ , равном двум, трем, четырем и пяти, представлены в табл. 2 явными формулами в радикалах и численными значениями. В методе линейной ла-

<sup>1</sup>  $d$  – первая буква слова dimensionless (безразмерное)

гранжевой аппроксимации по критерию (15) с дифференцированием функции (14) получены явные формулы в радикалах при  $n = 2, 3, 4$ , а при  $n = 5$  – значения координат численным методом. Совпа-

дение результатов по критерию (15) с точечным множеством (22) подтверждает вышеуказанное следствие. Очевидно, что по методу индукции точечное множество (22) применимо и при  $n > 5$ .

**Таблица 2.** Оптимальные координаты  $z_{n,i,d}$  узлов сетки аппроксимации ( $z_{n,1,d} = 0, z_{n,n+1,d} = 1$ )

**Table 2.** Optimal coordinates  $z_{n,i,d}$  of approximation grid nodes ( $z_{n,1,d} = 0, z_{n,n+1,d} = 1$ )

| $n$ | $i$ | Формулы координат в радикалах /<br>Formulas for coordinates in radicals | Численные значения координат /<br>Numerical values of coordinates |
|-----|-----|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 2   | 2   | $1/2$                                                                   | $1/2$                                                             |
| 3   | 2   | $1/4$                                                                   | $1/4$                                                             |
|     | 3   | $3/4$                                                                   | $3/4$                                                             |
| 4   | 2   | $(1-\sqrt{2}/2)/2$                                                      | 0,1404                                                            |
|     | 3   | $1/2$                                                                   | $1/2$                                                             |
|     | 4   | $(1+\sqrt{2}/2)/2$                                                      | 0,8536                                                            |
| 5   | 2   | $(3-\sqrt{5})/8$                                                        | 0,09549                                                           |
|     | 3   | $(5-\sqrt{5})/8$                                                        | 0,34549                                                           |
|     | 4   | $(3+\sqrt{5})/8$                                                        | 0,6545                                                            |
|     | 5   | $(5+\sqrt{5})/8$                                                        | 0,9045                                                            |

Результаты решения задачи вычисления внешней нагрузки на балку с использованием математической модели коэффициентной обратной задачи

По рис. 1 при  $n = 3$  внешняя нагрузка

$$M = -M_0 - Q_0 l = -a_{3,2} EI - a_{3,3} EI l, \\ P = -Q_0 = -a_{3,3} EI;$$

при  $n = 4$  внешняя нагрузка

$$M = -M_0 - Q_0 l - \frac{q_1 l^2}{2} = \\ = -EI \left( a_{4,2} + a_{4,3} l + a_{4,4} \frac{l^2}{2} \right), \\ P = -Q_0 - q_1 l = -EI (a_{4,3} + a_{4,4} l), \\ q = q_1 = a_{4,4} EI.$$

При обобщении многочлена (4) до многочлена (5) внешняя нагрузка, в том числе средняя распределенная нагрузка  $q_a^1$ , имеет вид

<sup>1</sup>  $a$  – первая буква слова average (средняя)

$$\begin{aligned}
M &= -M_0 - Q_0 l + l^2 \sum_{i=1}^{n-3} \frac{q_{i \max}}{i(i+1)} = \\
&= -EI \left( a_{n,2} + a_{n,3} l + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{a_{n,i+3} l^{i+1}}{i(i+1)} \right), \\
P &= -Q_0 - l \sum_{i=1}^{n-3} \frac{q_{i \max}}{i} = \\
&= -EI \left( a_{n,3} + \sum_{i=1}^{n-3} a_{n,i+3} \frac{l^i}{i} \right), \quad (23) \\
q_{i \max} &= EI a_{n,i+3} l^{i-1}, \\
q_a &= \sum_{i=1}^{n-3} \frac{q_{i \max}}{i} = \\
&= EI \sum_{i=1}^{n-3} \frac{a_{n,i+3} l^{i-1}}{i}, \quad n \geq 4.
\end{aligned}$$

Внешняя нагрузка (23) с учетом уравнения (8) имеет вид

$$\begin{aligned}
M &\approx -EI \left( \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,2,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] + \right. \\
&+ l \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] + \\
&+ \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^{j+1}}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,j+3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] \Bigg), \\
P &\approx -EI \left( \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] + \right. \\
&+ \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^j}{j} \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,j+3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] \Bigg), \quad (24) \\
q_{j \max} &= EI \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,j+3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right], \\
q_a &\approx EI \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^{j-1}}{j} \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,j+3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right], \quad n \geq 4.
\end{aligned}$$

Применением дифференциала к оценке погрешности формул (24) и суммированием абсолютных погрешностей отдельных составляющих в этих формулах получены абсолютные по-

грешности внешних нагрузок, например, погрешность внешней нагрузки  $M$  при  $n \geq 4$

$$\begin{aligned}
\Delta M &= EI \left( \Delta \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,2,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] + \right. \\
&+ l \Delta \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] + \\
&+ \Delta \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^{j+1}}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,j+3,i} \left[ y_n^*(a^*, z_i) \right] \Bigg),
\end{aligned}$$

а для оценки влияния погрешности входных данных на качество приближения внешней нагрузки получены целевые параметры в виде аналогов констант Лебега второго рода

$$\begin{aligned}
\Lambda_{n,M,s} &= \Lambda_{n,2,s} + l \Lambda_{n,3,s} + \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^{j+1}}{j(j+1)} \Lambda_{n,j+3,s}, \\
\Lambda_{n,P,s} &= \Lambda_{n,3,s} + \sum_{j=1}^{n-3} \frac{l^j}{j} \Lambda_{n,j+3,s}, \\
\Lambda_{n,q_{j \max},s} &= \Lambda_{n,j+3,s}, \quad j = 1 : n-3, \quad n \geq 4.
\end{aligned}$$

Применяя формулы (13) ... (16) к оценке погрешности формул (12) и (23), получены формулы безразмерных целевых параметров  $\Lambda_{n,r,s} = l^r \Lambda_{n,r,s}$ ,  $\Lambda_{n,M,s} = l^2 \Lambda_{n,M,s}$ ,  $\Lambda_{n,P,s} = l^3 \Lambda_{n,P,s}$  и  $\Lambda_{n,q_{j,s}} = l^4 \Lambda_{n,q_{j,s}}$ , показанные в табл. 3.

Значения целевых параметров качества приближения внешней нагрузки намного больше значений целевых параметров качества приближения начальных параметров  $M_0$  и  $Q_0$  упругой линии балки. Снизить значения целевых параметров качества приближения внешней нагрузки  $\Lambda_{n,M,s}$  и  $\Lambda_{n,P,s}$ , являющихся сеточными функциями, соответственно до

значений параметров  $A_{n,2,s}$  и  $A_{n,3,s}$  с получением оптимального плана узлов сетки аппроксимации позволяют результаты теорем 1 и 2.

**Таблица 3.** Безразмерные целевые параметры качества приближения внешней нагрузки

**Table 3.** Dimensionless target parameters of the external load approximation quality

| $n$ | Обозначения параметров / Parameter designations | Численные значения параметров / Numerical values of the parameters |
|-----|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 2   | $A_{2,2,s} = A_{2,M,s}$                         | 16                                                                 |
| 3   | $A_{3,2,s}$                                     | 96                                                                 |
|     | $A_{3,3,s} = A_{3,P,s}$                         | 192                                                                |
|     | $A_{3,M,s}$                                     | 288                                                                |
| 4   | $A_{4,2,s}$                                     | 320                                                                |
|     | $A_{4,3,s}$                                     | 1536                                                               |
|     | $A_{4,4,s} = A_{4,q_1,s}$                       | 3072                                                               |
|     | $A_{4,M,s}$                                     | 5360                                                               |
|     | $A_{4,P,s}$                                     | 4608                                                               |
| 5   | $A_{5,2,s}$                                     | 800                                                                |
|     | $A_{5,3,s}$                                     | 6720                                                               |
|     | $A_{5,4,s} = A_{5,q_{1\max},s}$                 | 30720                                                              |
|     | $A_{5,5,s} = A_{5,q_{2\max},s}$                 | 61440                                                              |
|     | $A_{5,M,s}$                                     | 28000                                                              |
|     | $A_{5,P,s}$                                     | 37440                                                              |

**Теорема 1.** Если в коэффициентной обратной задаче при плоском изгибе консольной балки известны степень  $n$  исследуемого алгебраического многочлена упругой линии балки и формулы множителей Лагранжа  $l_{n,2,i}$  при  $n \geq 3$ , то для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления внешней нагрузки изгибающим моментом  $M$  на свободном конце балки приближением  $M \approx \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,M,i} [y_n^*(a^*, z_i)]$  множители Лагранжа  $l_{n,M,i}$  равны умноженным на  $(-1)$  множителям Лагранжа  $l_{n,2,i}$  с обратной последовательностью узлов сетки аппроксимации.

Таким образом, множители Лагранжа  $l_{n,M,i}$  образуют последовательность  $l_{n,M,1} = -l_{n,2,n+1}$ ,  $l_{n,M,2} = -l_{n,2,n}$ , ...,  $l_{n,M,n+1} = -l_{n,2,1}$ , что эквивалентно равенству

$$l_{n,M,i} = -l_{n,2,n+2-i}. \quad (25)$$

**Теорема 2.** Если в коэффициентной обратной задаче для уравнения прогибов известны степень  $n$  исследуемого алгебраического многочлена упругой линии балки и формулы множителей Лагранжа  $l_{n,3,i}$ , то при  $n \geq 4$  для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления внешней сосредоточенной нагрузки  $P$  на свободном конце балки приближением  $P \approx \sum_{i=1}^{n+1} l_{n,P,i} [y_n^*(a^*, z_i)]$  множители Лагранжа  $l_{n,P,i}$  равны множителям Лагранжа  $l_{n,3,i}$  с обратной последовательностью узлов сетки аппроксимации.

Таким образом, множители Лагранжа  $l_{n,P,i}$  образуют последовательность  $l_{n,P,1} = l_{n,3,n+1}$ ,  $l_{n,P,2} = l_{n,3,n}$ , ...,  $l_{n,P,n+1} = l_{n,3,1}$ , что эквивалентно равенству

$$l_{n,P,i} = l_{n,3,n+2-i}. \quad (26)$$

Теоремы 1 и 2 доказываются по индукции. С использованием соотношения (25) при  $n \in (3, 4, 5)$  численным способом получены значения целевых параметров  $\Lambda_{n,M,s}$  и  $A_{n,M,s}$ , соответственно равные значениям  $\Lambda_{n,2,s}$  и  $A_{n,2,s}$ , в том числе показанные в табл. 3. Также получено равенство значений целевых параметров  $\Lambda_{n,P,s}$  и  $\Lambda_{n,3,s}$ , соответственно с параметрами  $A_{n,P,s}$  и  $A_{n,3,s}$  с использованием соотношения (26) при  $n \in (4, 5)$ , что доказывает теоремы 1 и 2. Тем самым доказано существование и единственность решения задачи восстановления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему. По методу индукции формулы (25) и (26) применимы и при  $n > 5$ .

Результаты теорем 1 и 2 снижают погрешность вычисления целевых параметров, в частности, в 5,5 раз параметра  $A_{5,P,s}$  и в 3,5 раз параметра  $A_{5,M,s}$ . Эти параметры соответствуют оптимальным координатам  $z_{n,i,d}$  узлов сетки аппроксимации (см. табл. 2), отклонение координат от оптимальных увеличивает погрешность целевых параметров, в частности, при равномерной сетке аппроксимации погрешность параметров  $A_{5,P,s}$  и  $A_{5,M,s}$  увеличивается бо-

лее, чем в 1,6 раз. Приведенные оценки влияния погрешности зашумленных входных данных вычислительной системы на точность решения задачи восстановления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему, а также влияния отклонения координат сетки аппроксимации от оптимальных, характеризуют эффективность данного исследования.

## Выводы

Данное исследование посвящено вопросам обработки вычислительной системой зашумленных конструктивных входных данных в обратной задаче Коши для уравнения прогибов балки с последующим вычислением внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему.

В задаче вычисления внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему предложена математическая модель, включающая связь распределения на исследуемой конструкции узлов сетки аппроксимации, в которых измеряются прогибы балки в качестве входных данных вычислительной системы, с чебышёвским альтернансом.

Решение поставленной задачи получено с выявленной в линейной лагранжевой аппроксимации функциональной связью множителей Лагранжа для внешней нагрузки на стоечно-балочную конструктивную систему и для начальных параметров упругой линии балки.

### Список литературы

1. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network / M.E. Haque, M.F.M. Zain, M.A. Hannan, M.H. Rahman // *Smart Structures and Systems*. 2015; 16(4): 607-621. <https://doi.org/10.12989/sss.2015.16.4.623>.
2. Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Тонков И.Л. Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017; 13(3): 42-57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.
3. Lehmhus D., Busse M. Structural health monitoring (SHM) // Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). *Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons Inc., 2018. P. 529-570. DOI: 10.1002/9783527679249.ch22.
4. Chen H-P., Ni Yi-Q. Structural health monitoring of large civil engineering structures. 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA: John Wiley & Sons Inc., 2018. 302 p. DOI:10.1002/9781119166641.
5. Boundary condition modelling and identification for cantilever-like structures using natural frequencies / W. Liu, Z. Yang, L. Wang, N. Guo // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019; 32(6): 1451-1464. DOI: 10.1016/j.cja.2019.04.003.
6. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review // *Automation in Construction*. 2019; 104: 215-229. DOI:10.1016/j.autcon.2019.04.002.
7. Перельмутер А. В. Обратные задачи строительной механики // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2020; 22(4): 83-101. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101>.
8. Локтионов А.П. Информационно-измерительная система мониторинга балок в строительных конструкциях // *Известия Юго-Западного государственного университета*. 2021. Т. 25, № 4. С. 23-51. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51>.
9. Markov I.P., Igumnov L.A. Reconstruction of the time dependence of a transient boundary load applied to a three-dimensional isotropic linearly elastic solid // *Mechanics of Solids*. 2021; 56(6): 1004-1012. DOI: 10.3103/S0025654421060108.
10. Локтионов А. П. Информационная система анализа балочных элементов под комбинированной нагрузкой // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2021; 2: 45-52. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.2.45.52.
11. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Обратные коэффициентные задачи в механике // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019; 3: 37-47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.

12. Кабанихин С.И. Обратные задачи и искусственный интеллект // *Успехи кибернетики*. 2021; 2(3): 33-43. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5.
13. Meschikhin I. A., Gavryushin S. S. Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring // *Mat. Mod. Chisl. Met.* 2016; 2: 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>.
14. Горелик В.А., Золотова Т.В. Полный метод чебышевской интерполяции в задаче построения линейной регрессии // *Чебышевский сборник*. 2022; 23(4): 52-63. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63>.
15. Huang Y., Ludwig S.A., Deng F. Sensor optimization using a genetic algorithm for structural health monitoring in harsh environments // *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2016; 6(3): 509-519. <https://doi.org/10.1007/s13349-016-0170-y>.
16. Siraya T. N. Methods of data processing in measurements and metrological models // *Measurement Techniques*. 2018; 61: 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
17. Cheney E.W., Kincaid D.R. Numerical Mathematics and Computing. Thomson Brooks/Cole; Belmont, California, USA, 2013. 765 p. URL: <https://hlevkin.com/hlevkin/60numalgs/Pascal/Numerical%20Mathematics%20and%20Computing.pdf>.
18. Moore R., Kearfott R., Cloud M. Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, USA, 2009. 234 p.
19. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Издательство «XYZ», 2024. 662 с. URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
20. Boykov I.V., Krivulin N.P. An Approximate Method for Recovering Input Signals of Measurement Transducers // *Measurement Techniques*. 2022; 64: 943-948. <https://doi.org/10.1007/s11018-022-02026-3>.
21. Loktionov A. P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // *Telecommunications and Radio Engineering*. 2013; 72(2): 161-171. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.
22. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // *Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. 2019; 8(5): 480-486. DOI: 10.1134/S2304487X1905002X.
23. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification // *Inverse Problems*. 2020; 36(12), id.125015: 30 pp. DOI: 10.1088/1361-6420/abc530.
24. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // *Measurement Techniques*. 2021; 64: 151-155. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.

25. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Inverse and Ill-Posed Problems Series 52. De Gruyter; Berlin, New York, 2007. 438 p. <https://doi.org/10.1515/9783110205794>.

26. Малозёмов В.Н. Что даёт информация об альтернансе? // Малозёмов В.Н. Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 259-267. URL: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/rep15.shtml#0312>.

27. Bakushinsky A.B., Kokurin M.M., Kokurin M.Yu. Regularization algorithms for Ill-posed problems. Berlin, Boston: De Gruyter; 2018. 153 p. <https://doi.org/10.1515/9783110557350>.

28. Локтионов А. П. Чебышёвский альтернанс при аппроксимации начальных условий обратной задачи Коши // *Известия Юго-Западного государственного университета*. 2021. Т. 25, № 3. С. 86-102. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102>.

29. Соловьев С. Ю. Об одном классе множителей многочленов Чебышева // *Чебышевский сборник*. 2021; 22(4): 241-252. DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252.

30. Локтионов А.П. Восстановление начальных параметров балки при заданных младших коэффициентах уравнения прогибов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2022; 6: 2-7. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.6.2.7.

31. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. 3 изд. М.: Физматлит, 2012. 427 с.

32. Балакин Д. А., Пытьев Ю. П. Редукция измерения при наличии субъективной информации // *Матем. Моделирование*. 2018; 30(12): 84-110. DOI: 10.31857/S023408790001938-5.

33. Loktionov A.P. Numerical Differentiation in the Measurement Model // *Meas Tech*. 2019; 62: 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.

34. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016; 2016(93): 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

35. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Берлин: Директ-Медиа, 2021. 850 с. URL: <https://archive.org/details/48915verzhbickiyvmosnovychislennyhmetodov/page/n1/mode/2up>

36. Reddy A.N., Ananthasuresh G.K. On computing the forces from the noisy displacement data of an elastic body // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008; 76(11): 1645-1677. URL: <http://eprints.iisc.ac.in/id/eprint/17827>.

37. Янчевский И.В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упруго-деформируемому элементу конструкции // *Проблемы машиностроения*. 2015; 18(2): 43-54. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120920060>.

## References

1. Haque M.E., Zain M.F.M., Hannan M.A., Rahman M.H. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network. *Smart Structures and Systems*. 2015; 16(4): 607-621. <https://doi.org/10.12989/sss.2015.16.4.623>.
2. Kashevarova G.G., Tonkov, Y.L., Tonkov I.L. [Intellectual automation of engineering survey of building objects]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017; 13(3): 42-57. (In Russ.). <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.
3. Lehmhus D., Busse M. Structural health monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). *Material Integrated Intelligent Systems Technology and Application*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc.; 2018. P. 529-570. 696 p. DOI: 10.1002/9783527679249.ch22.
4. Chen H-P., Ni Yi-Q. Structural health monitoring of large civil engineering structures. Hoboken, USA: John Wiley & Sons Inc.; 2018. 302 p. doi:10.1002/9781119166641.
5. Liu W., Yang Z., Wang L., Guo N. Boundary condition modelling and identification for cantilever-like structures using natural frequencies. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019; 32(6): 1451-1464. DOI: 10.1016/j.cja.2019.04.003.
6. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review. *Automation in Construction*. 2019; 104: 215-229. DOI:10.1016/j.autcon.2019.04.002.
7. Perelmuter A.V. Inverse problems of structural mechanics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arxitekturno-stroitel'nogo universiteta = Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2020; 22(4): 83-101. (In Russ.). <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101>.
8. Loktionov A. P. Information and Measurement System for Monitoring Beams in Building Structures. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(4): 29-51 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51>.
9. Markov I.P., Igumnov L.A. Reconstruction of the time dependence of a transient boundary load applied to a three-dimensional isotropic linearly elastic solid. *Mechanics of Solids*. 2021; 56(6): 1004-1012. (In Russ.). DOI: 10.3103/S0025654421060108.
10. Loktionov A.P. Information system for analysis of beam elements under combined load. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021; 2: 45-52. (In Russ.). DOI: 10.37538/0039-2383.2021.2.45.52.
11. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. Inverse coefficient problems in mechanics. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politexnicheskogo universiteta. Mexanika = PNRPU MECHANICS BULLETIN*. 2019; 3: 37-47. (In Russ.). DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.

12. Kabanikhin S.I. Inverse Problems and Artificial Intelligence. *Uspexi kibernetiki = Russian artificial intelligence Journal of Cybernetics*. 2021; 2(3): 33-43. (In Russ.). <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2021-2-3-5>.
13. Meschikhin I. A., Gavryushin S. S. Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring. *Mat. Mod. Chisl. Met.* 2016; 12: 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>.
14. Gorelik V.A., Zolotova T.V. The total method of Chebyshev interpolation in the problem of constructing a linear regression. *Chebyshevskii Sbornik = Chebyshev collection*. 2022; 23(4): 52-63. (In Russ.). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63>.
15. Huang Y., Ludwig S.A., Deng F. Sensor optimization using a genetic algorithm for structural health monitoring in harsh environments. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2016; 6(3): 509-519. <https://doi.org/10.1007/s13349-016-0170-y>.
16. Siraya T. N. Methods of data processing in measurements and metrological models. *Measurement Techniques*. 2018; 61: 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
17. Cheney E.W., Kincaid D.R. *Numerical Mathematics and Computing*. Belmont: Thomson Brooks/Cole; 2013. 765. Available at: <https://hlevkin.com/hlevkin/60numalgs/Pascal/Numerical%20Mathematics%20and%20Computing.pdf>.
18. Moore R., Kearfott R., Cloud M. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. 234.
19. Sharyi S. P. Finite-dimensional interval analysis. Novosibirsk: Izdatel'stvo «XYZ», 2024. 662 p. Available at: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
20. Boykov I.V., Krivulin N.P. An Approximate Method for Recovering Input Signals of Measurement Transducers. *Measurement Techniques*. 2022; 64: 943-948. <https://doi.org/10.1007/s11018-022-02026-3>.
21. Loktionov, A. P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2013; 72(2): 161-171. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70>.
22. Kudryavtsev K.Ya. Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from experimental data. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI = Bulletin of the National Research Nuclear University MEPhI*. 2019; 8(5): 480-486. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.
23. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification. *Inverse Problems*. 2020; 36(12), id.125015: 30 pp. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc530>.
24. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments. *Measurement Techniques*. 2021; 64: 151-155. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.

25. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. *Inverse and Ill-Posed Problems Series 52*. Berlin, New York: De Gruyter; 2007. 438. <https://doi.org/10.1515/9783110205794>.

26. Malozemov V.N., What does information about alternance give? In: *Malozemov V.N. Selected lectures on extremal problems. Part two*. St. Petersburg: Izdatel'stvo VVM; 2017; P. 259-267. (In Russ.). Available at: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/rep15.shtml#0312>.

27. Bakushinsky A.B., Kokurin M.M., Kokurin M.Yu. Regularization algorithms for Ill-posed problems. Berlin, Boston: De Gruyter; 2018. 153 p. <https://doi.org/10.1515/9783110557350>.

28. Loktionov A.P. Chebyshev Alternance when Approximating Initial Conditions of the Inverse Cauchy Problem. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(3): 86-102. (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102>.

29. Soloviev S. Y. On a class of factors of the Chebyshev polynomials. *Chebyshevskii sbornik = Chebyshev collection*. 2021; 22(4): 241-252. (In Russ.). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252>.

30. Loktionov A.P. Recovery of the initial parameters of the beam with the given junior coefficients of the deflection equation. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022; 6: 2-7. (In Russ.). <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.2.7>.

31. Pyt'ev YU. P. Methods of mathematical modeling of measuring and computing systems. Moscow: Izdatel'stvo Fizmatlit; 2012. 427 p. (In Russ.).

32. Balakin D.A., Pyt'ev Yu.P. Measurement reduction in the presence of subjective information. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018; 30(12): 84-110. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S023408790001938-5>.

33. Loktionov A.P. Numerical Differentiation in the Measurement Model. *Meas Tech*. 2019; 62: 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.

34. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*. 2016; 2016(93): 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

35. Verzhbitskii V.M. Fundamentals of numerical methods. Moscow; Berlin: Izdatel'stvo Direkt-Media; 2021. 850 p. (In Russ.). Available at: <https://archive.org/details/48915verzhbickiyvmosnovychislennyhmetodov/page/n1/mode/2up>.

36. Reddy A.N., Ananthasuresh G.K. On computing the forces from the noisy displacement data of an elastic body. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008; 76(11): 1645-1677. Available at: <http://eprints.iisc.ac.in/id/eprint/17827>.

37. Yanchevskii I.V. Restoration of temporary dependence of non-stationary disturbance applied to elastically deformed structural element. *Problemy mashinostroeniya = Problems of me-*

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Локтионов Аскольд Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры инфраструктурных энергетических систем, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: [loapa@mail.ru](mailto:loapa@mail.ru), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015

**Askold P. Loktionov**, Dr. of Sci. (Engineering), Professor of the Infrastructural Energy Systems Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: [loapa@mail.ru](mailto:loapa@mail.ru), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015

**Ватутин Эдуард Игоревич**, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация e-mail: [evatutin@rambler.ru](mailto:evatutin@rambler.ru), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7362-7387> Researcher ID: C-9412-2017

**Eduard I. Vatutin**, Doctor of Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation e-mail: [evatutin@rambler.ru](mailto:evatutin@rambler.ru) ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7362-7387> Researcher ID: C-9412-2017